A. Charifi, B. Bouikhalene, S. Kabbaj, E. Elqorachi.

Tome I

ANALYSE DANS $\mathbb{R}$

Partie COURS

1^{er} et 2^{e} Semestre de la 1^{re} année $(S_1\&S_2)$
Facultés des Sciences,
Section Mathématique CRMEF,
Classes Préparatoires
et Classes Integrées aux grandes écoles.

Colletion : Enseignants Etudiants (EE)
2015

Tome I

ANALYSE DANS $\mathbb{R}$

Partie COURS

1^{er} et 2^{e} Semestre de la 1^{re} année $(S_1\&S_2)$
Facultés des Sciences,
Section Mathématique CRMEF,
Classes Préparatoires
et Classes Integrées aux grandes écoles.

Par

A. Charifi,
PES, CRMEF Rabat-Salé-Kénitra

B. Bouikhalene,
PH, FP Beni Mellal

S. Kabbaj,
PES, FS Kénitra

E. Elqorachi,
PES, FS Agadir

Collection : Enseignants Etudiants (EE)
Version : OPEN ACCESS
2015

Dépôt légal N° : 2010 MO 2240
ISBN : 978 9954-30-015-2
ISSN : 2028-2729

Préface

Cet ouvrage issu d'un cours d'analyse professé en MP_1 (Mathématique et Physique) aux universités marocaines, depuis les années quatre vingt dix, est destiné aux étudiants du premier semestre de la première année (filières SMA, SMI, MIP, SMP, SMC, SVT et STU) des différentes facultés des sciences. C'est, également une référence précieuse pour les étudiants en première année des classes intégrées et classes préparatoires, aux grandes écoles. Il pourra aussi être utile aux candidats aux concours de recrutement de personnels enseignants dans des lycées et collèges, aux étudiants du C.R.M.E.F (Centres Régionaux des Métiers de l'Education et de la Formation) et à tous ceux qui veulent se familiariser avec les méthodes mathématiques de bases en analyse telle qu'elles sont actuellement enseignées au premier cycle universitaire.

L'analyse sur $\mathbb{R}$ est à la base de la plus part des branches Mathématiques à savoir

- la topologie,
- les suites et series,
- l'integration,
- l'analyse de Fourier,
- les équations aux dérivées partielles etc...

C'est pourquoi nous avons tenu à mettre cet ouvrage à la disposition du lecteur. Les connaissances requises pour la lecture sont celles des programmes de l'enseignement secondaire.

Le contenu de cet ouvrage traite des concepts classiques de l'Analyse mathématique qui sont étudies dans tous les livres du premier cycle universitaire (Dieudonné Tome1, Dixmier, Collection U et etc...). C'est en faite la réforme instaurée en 2003 et le plan d'urgence mis en place en 2008 par le ministère de tutelle qui en est le fil conducteur et qui en justifie le plan. Ce contenu englobe deux éléments de module,

– l'analyse et
– la topologie

de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Outre la description des savoirs traités dans ce livre (définitions des concepts, propositions, théorèmes, interprétations et applications) on y trouve aussi, dans la partie exercice attaché à ce document une centaine d'exercices et problèmes dont une quarantaine corrigés. Ces exercices sont d'un degré de difficulté couramment rencontré dans les examens et les devoirs surveillés. Ils sont choisis pour être des situations pertinentes, non seulement pour permettre l'assimilation, des concepts, des formules et des théorèmes utilisés dans le cours, mais aussi pour permettre l'acquisition des heuristiques de bases, pour résoudre des problèmes dont les solutions utilisent des molèles, des techniques et des outiles de bases de l'analyse mathématique.

Les auteurs espèrent que le présent ouvrage, malgré ses imperfections, pourra rendre service aux étudiants et aux lecteurs. C'est pour ce but qu'il a été écrit et publié.

Les auteurs.

Table des matières

Chapitre 1

CONSTRUCTION DE $\mathbb{R}$.

Les nombres réels possèdent une place particulière dans le monde mathématique. Tant l'intuition de leur existence est ancienne (depuis Pythagore et sa preuve de *l'irrationnalité* de $\sqrt{2}$, $6^{\text{ème}}$ siécle), tant est tardive leur construction rigoureuse (datant du $19^{\text{ème}}$ siécle par Cantor$^{Cn.}$ et Dedekind$^{Dd.}$).
En mathématiques, il existe différentes constructions des nombres réels, dont les deux plus connues sont :
. *les coupures de Dedekind*,
. *les suites de Cauchy*$^{Cu.}$.
Nous allons exposé dans ce chapitre la construction des réels selon la méthode élaborée par Cantor par l'utilisation des suites de Cauchy.
L'objectif donc de ce chapitre est de donner une construction complète des nombres réels ainsi que leurs propriétés fondamentales. La constuction sera basée sur l' idée de Cantor qui réside dans le fait que l'on peut atteindre tout nombre réel par une suite de Cauchy de rationnels. L'élément limite, auquel il va falloir donner un sens, sera alors défini comme un nombre réel. Cette idée joue un rôle majeur dans l'analyse pour la construction de nombreux espaces complets.
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ sera alors construit comme étant un surcorps de $\mathbb{Q}$ (c'est-à-dire comme un corps contenant strictement le corps $\mathbb{Q}$ des fractions rationnelles). Enfin, l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi construit est muni des opérations usuelles (à savoir la multiplication et l'addition) et de la relation d'ordre, relevant celles déjà connues sur $\mathbb{Q}$. Elles lui confèrent une structure de corps totalement ordonné.

Cn. : mathém. Allemand 1845-1918 ; **Dd. :** mathém. Allemand 1831-1916

Cu. : mathém. Français 1789-1857.

1.1 Rappels.

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ l'ensemble des entiers naturels, à partir du quel nous construisons de manière naturelle l'anneau des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\pm n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Nous avons $\mathbb{N}$ est strictement contenu dans $\mathbb{Z}$ du faite que $-1 \in \mathbb{Z}$, mais $-1 \notin \mathbb{N}$.
Avec $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, l'ensemble des fractions rationnelles est

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} \ / \ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\} \\ &= \left\{ \pm\frac{p}{q} \ / \ (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \right\} \\ &= \{ x \ \ / qx + p = 0 \text{ où } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \}. \end{aligned}$$

N.B : Les nombres p et q sont dits premiers entre eux s'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1 et -1.
Opérations sur les rationnels.

Pour deux nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$,
L'addition est donnée par : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$,
La multiplication par : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
L'opposé et **l'inverse** par $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ et $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ si $a \neq 0$.
L'ensemble $\mathbb{Q}$, muni des lois d'addition et de multiplication données plus haut, forme un corps, le corps des fractions des entiers relatifs.
1. $(\mathbb{Q}, +)$ forme un groupe commutatif, dont l'élément neutre est 0 :
Loi de composition interne : Pour tous a et b éléments de $\mathbb{Q}$, le résultat $a + b$ est aussi dans $\mathbb{Q}$.
i. Associativité : Pour tous éléments a, b et c de $\mathbb{Q}$, l'égalité

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

est vraie.
ii. Élément neutre : Il existe un élément 0 de $\mathbb{Q}$ tel que, pour tout a dans $\mathbb{Q}$,

$$0 + a = a + 0 = a.$$

0 est appelé élément neutre du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
iii. Symétrique Pour tout élément a de $\mathbb{Q}$, il existe b dans $\mathbb{Q}$ tel que

$$a + b = b + a = 0,$$

où 0 est l'élément neutre. b est appelé symétrique de a (ou opposé de a).
iv. Commutativité :

$$a + b = b + a,$$

Pour tous éléments a, b de $\mathbb{Q}$.
2. $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ forme aussi un groupe multiplicatif.
3.Distributivité/ La multiplication est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition :
$\forall\ a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

et

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b}$ est strictement positif si et seulement si $ab > 0$; $\frac{a}{b}$ est strictement négatif si et seulement si $ab < 0$.
Notations : On note $\mathbb{Q}_*^+$ l'ensemble des rationnels strictement positifs, $\mathbb{Q}_*^-$ l'ensemble des rationnels strictement négatifs ; on note $\mathbb{Q}^+$ (resp. $\mathbb{Q}^-$) l'ensemble $\mathbb{Q}_*^+ \sqcup \{\frac{0}{1}\}$ (resp. l'ensemble $\mathbb{Q}_*^- \sqcup \{\frac{0}{1}\}$). On a alors

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \Longleftrightarrow ab \geq 0.$$

De ces propriétés, on déduit des propriétés de signe de la somme et du produit de deux rationnels :
$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}^+$ et $\alpha\beta \in \mathbb{Q}^+$. De même $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^- \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}^-$ et $\alpha\beta \in \mathbb{Q}^+$. Enfin $\alpha \in \mathbb{Q}^-, \beta \in \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Q}^-$. On est désormais en mesure de définir la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$.
La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$, de plus La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la loi $+$ sur $\mathbb{Q}$, et avec la loi $\times$ sur $\mathbb{Q}^+$:
i. $\begin{cases} a \leq b, \\ c \leq d, \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$
ii. $\begin{cases} 0 \leq a \leq b, \\ 0 \leq c \leq d, \end{cases} \Rightarrow 0 \leq ac \leq bd$ et $\begin{cases} a \leq b \leq 0, \\ c \leq d \leq 0, \end{cases} \Rightarrow 0 \leq bd \leq ac$

$\mathbb{Q}$ **est archimédien.**
Soit G un groupe (additif) ordonné. On note G^+ l'ensemble des éléments de G supérieurs ou égaux à l'élément neutre 0. G_*^+ désigne l'ensemble $G^+ \backslash \{0\}$. Etant donné un élément a du groupe G, et n un entier naturel, $n.a$ désigne l'élément $a + a + \ + a$ (n occurences de l'élément a).

Définition 1.1.1. *Le groupe G est dit archimédien s'il vérifie la propriété :*

$$\forall b \in G^+,\ \forall a \in G_*^+,\ \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ tels que } n.a \geq b.$$

$\mathbb{Q}$ est archimédien :

$$\forall \beta \in \mathbb{Q}^+,\ \forall \alpha \in \mathbb{Q}^+_*, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tels que } n \times \alpha \geq \beta.$$

En effet soit β un rationnel positif et α un rationnel strictement positif. Si $\beta = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer α de la forme $\frac{a}{q}$ et β de la forme $\frac{b}{q}$, où a, b et q sont des entiers naturels non nuls. On a alors $a \geq 1$, et donc $a \times \beta \geq \beta$ (la relation d'ordre est compatible avec la multiplication, sur $\mathbb{Q}^+$). Or,

$$a \times \beta = a\frac{b}{q} = b \times \alpha, \text{ donc } b \times \alpha \geq \beta.$$

Valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. On définit sur $\mathbb{Q}$ la valeur absolue en posant, pour tout rationnel α : $|\alpha|$ =max $(\alpha, -\alpha)$.
Cette définition est justifiée car $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{Q}$ (et donc, pour tout rationnel α, l'ensemble $\{\alpha, -\alpha\}$ admet un plus grand élément). En particulier, on a $|-\alpha| = |\alpha|$ pour tout α. Pour tous rationnels α et β, on a

$$|\alpha \times \beta| = |\alpha| \times |\beta|;\ |\alpha| = |\beta| \Longleftrightarrow \alpha^2 = \beta^2;$$

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \text{ (Inéqualité triangulaire)}$$

et

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|.$$

Remarques 1.1.1. *1) Entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ il y a un autre ensemble noté $\mathbb{D}$ appelé ensemble des nombres décimaux.*

2) On a $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, car $\frac{3}{2} = 1,5$.

3) $\mathbb{D} = \{a10^{-n}\ /\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$ est strictement contenu dans $\mathbb{Q}$, car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

L'ensemble des rationnels est insuffisant : En termes d'approximations numériques, $\mathbb{Q}$ peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs. Par exemple, peut - on mesurer dans $\mathbb{Q}$ la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2 ? La réponse est négative ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.) En effet supposons qu'il existe deux entiers naturels p et q (non nuls) premiers entre eux et tel que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Alors $p^2 = 2q^2$, ce qui montre que p est un nombre pair. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel

que $p = 2r$, on a $2r^2 = q^2$. Autrement dit q est lui même un nombre pair. Mais cela voudrait dire que 2 est un diviseur commun de p et q, ce qui contredit l'hypothèse.
Ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, *les irrationnels,* en concevant un ensemble plus vaste que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

Relation d'équivalence.
La notion de relation d'équivalence est un outil merveilleux. Elle permet tout d'abord de réunir des objets "équivalents" dans une même classe et ainsi de les réunir et de les traiter comme un seul. Un exemple plus élémentaire, est donné par la relation d'équivalence suivante : " l'entier n est équivalent à l'entier m si $|m-n|$ est pair". On aura alors une partition de $\mathbb{N}$ en deux sous ensembles : ceux qui sont équivalents à 1 c'est-à-dire les nombre impaires et ceux qui sont équivalents à 2 c'est-à-dire les nombres pairs.

Une relation $\mathcal{R}$ entre les éléments d'un ensemble E est dite relation d'équivalence si elle vérifie les trois conditions suivantes

i) *$\mathcal{R}$ est reflexive : $\forall\ x \in E$, on a $x\mathcal{R}x$.* On dit que x est en relation avec lui même;

ii) *$\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.* On dit que x est en relation avec y implique que y est en relation avec x;

iii) *$\mathcal{R}$ est transitive : $\forall x, y, z \in E$, on a $(\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.*
Une classe d'équivalence $\overline{x_0}$ d'un élément x_0 de E est l'ensemble de tous les éléments x de E qui sont équivalents [i.e. en relation avec x_0]

$$\overline{x_0}=\{x \in E\ /\ x\mathcal{R}x_0\}\,.$$

Tout élément de $\overline{x_0}$ est appelé représentant de la classe d'équivalence $\overline{x_0}$. De plus pour tout élément $x \in \overline{x_0}$, on a : $\overline{x} = \overline{x_0}$.
Les classes d'équivalence de E *modulo $\mathcal{R}$, forment un nouvel ensemble appelé ensemble quotient qu'on note $E/\mathcal{R}$.*

Exemple 1.1.1. *On prend $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R}$ la relation définie par*

$$n\mathcal{R}m \Leftrightarrow |n-m| \textit{ est un multiple de 5.}$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ car :

i. Réfléxivité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n - n = 0 = 0.5$ donc, $n\mathcal{R}n$ c'est-à-dire que $\mathcal{R}$ est réflixive.

ii. *Symétrie : si*

$$\begin{aligned} n\mathcal{R}m &\Rightarrow |n-m| = 5k,\ k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow |m-n| = 5k \\ &\Rightarrow m\mathcal{R}n \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{R}$ est symétrique.

iii. *Transitivité : si $n\mathcal{R}m$ et $m\mathcal{R}p \Rightarrow \exists k,\ h \in \mathbb{N}$ tel que $|n-m| = 5k$ et $|m-p| = 5h$ ce qui donne*

$$\begin{aligned} |n-p| &= \epsilon(n-p) \\ &= \epsilon(n-m+m-p) \\ &= \epsilon(\epsilon' 5k + \epsilon'' 5h) \\ &= 5\epsilon(\epsilon' k + \epsilon'' h),\ \epsilon,\ \varepsilon',\ \epsilon'' \in \{-1, 1\} \\ &\Rightarrow n\mathcal{R}p \end{aligned}$$

$\mathcal{R}$ est donc transitive.

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$ et son ensemble quotient est

$$E \backslash \mathcal{R} = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4}\}$$

où

$$\overline{n} = n + 5\mathbb{N},\ 0 \leq n \leq 4.$$

Remarque 1.1.1.

1. Une classe d'équivalence n'est jamais vide.
2. Si des éléments x et y de E sont dans une même classe d'équivalence alors leurs classes d'équivalences sont identiques.
3. L'ensemble des classes d'équivalence d'un ensemble E pour une relation d'équivalence donnée $\mathcal{R}$ définie une partition de E.
4. Une fois on a $\mathcal{R}$ relation d'équivalence sur E, on peut associer a tout élément de E la classe d'équivalence correspondante. Cela définit donc une application surjective, appelé la surjection canonique : $E \longrightarrow E/\mathcal{R}$, $x \longmapsto s(x) = \overline{x}$. Cette application n'est pas en général injective, mais on a

$$s(x) = s(y) \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{y} \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

Cette surjection est ainsi une bijection si la relation d'équivalence concernée n'est autre que la relation d'égalité.

Exemples 1.1.1.

a) *Pour $E = \mathbb{Q}$, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Q}$ par*

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}.$$

est une relation d'équivalence. En effet cette relation est reflexive car 0 appartient à $\mathbb{Z}$. Elle est symétrique car si $y - x$ appartient à $\mathbb{Z}$ alors $x - y$ appartient aussi à $\mathbb{Z}$. Enfin si $y - x$ et $z - y$ appartiennent à $\mathbb{Z}$ alors $z - x$ qui est égale à $(z - y) + (y - x)$ appartient à $\mathbb{Z}$ puisqu'il est stable par addition. En conclusion $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}$. La classe d'équivalence de tout élément z de $\mathbb{Z}$ est $\overline{z} = \mathbb{Z}$. En général pour tout élément r de $\mathbb{Q}$ la classe d'équivalence de r est égale à $r + \mathbb{Z}$.

b) *Pour $E = \mathbb{Q}$, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Q}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y-x \in \mathbb{N}$ n'est pas symétrique car si $y-x$ est dans $\mathbb{N}^*$ alors forcément $x - y$ est négatif donc n'appartient pas à $\mathbb{N}$. Par conséquent $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence.*

1.2 Suites dans $\mathbb{Q}$.

Une suite dans $\mathbb{Q}$ est une application r de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ qui associe à l'entier naturel n le nombre rationnel $r(n)$,

$$\begin{aligned} r : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q}. \\ n &\longrightarrow r(n) \end{aligned}$$

Une telle suite est notée $(r_0\ , r_1,\ r_2, \ldots r_n\ , \ldots)$ *ou bien* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le nombre r_n est appelé le terme général de la suite.

Exemples 1.2.1.
Les suites suivantes sont des suites dans $\mathbb{Q}$.

a) *La suite $(r_n)_{n\geq 1}$ dont le premier terme est $r_0 = 1$ et le terme général est $r_n = r_{n-1} + \frac{n}{10^n},\ n \geq 1$.*

b) *La suite $(r_n)_{n\geq 0}$ dont le terme général $r_n = \frac{1}{n+1}$.*

c) *La suite $(r_n)_{n\geq 0}$ dont le terme général $r_n = (-1)^n$.*

d) *La suite constante $(r_n)_{n\geq 0}$ où $r_n = Cte$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Notation : On notera par $\mathbb{S}$ l'ensemble de toutes les suites rationnelles.

Addition sur $\mathbb{S}$. Pour deux suites u et v de $\mathbb{S}$, on définit la somme de ces suites, de façon naturelle, comme leur somme en tant qu'applications, c'est-à-dire : $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Muni de la loi $+$, l'ensemble $\mathbb{S}$ possède une structure de groupe commutatif : Les propriétés de l'addition sur $\mathbb{S}$ découlent immédiatement des propriétés correspondantes dans $\mathbb{Q}$: la commutativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$ implique la commutativité sur $\mathbb{S}$; de même pour l'associativité, pour l'élément neutre $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, et enfin pour le symétrique de toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est autre que la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on notera bien sûr $-u$.

Multiplication sur $\mathbb{S}$: On définit également le produit de deux suites u et v de $\mathbb{S}$ comme le produit terme à terme : $u \times v = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tout comme pour l'addition, les propriétés de la multiplication sur $\mathbb{Q}$ permettent d'obtenir : la multiplication sur $\mathbb{S}$ est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition, et possède l'élément neutre $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les éléments de $\mathbb{S}$ inversibles pour la multiplication sont les suites dont tous les termes sont non nuls. A cette condition, on trouve un inverse pour la suite en considérant la suite des inverses.

Quelques sous-ensembles remarquables de $\mathbb{S}$

Définition 1.2.1. *La suite rationnelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si elle vérifie la propriété :*

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{Q}_*^+\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \textit{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon.$$

L'ensemble des suites convergeantes vers 0 sera noté $\mathcal{I}$. De la même façon, on a la notion de convergence vers un rationnel l autre que 0 en remplaçant $|u_n|$ par $|u_n - l|$ dans la définition.

Définition 1.2.2. *La suite rationnelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si :*

$$\exists\ A \in \mathbb{Q}_+\ \textit{tel que : } |u_n| \leq A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Leur ensemble sera noté $\mathbb{B}$.

Définition 1.2.3. *On appelle suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ ayant la propriété suivante*
$\forall\varepsilon > 0\ (\varepsilon \in \mathbb{Q}), \exists N \in \mathbb{N}$ tels que $(n \geq N$ et $m \geq N) \Longrightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon$.
On note par $\mathfrak{C}$ l'ensemble de toutes les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Exemples 1.2.2.

a) La suite $u_n = \frac{1}{n}$ converge dans $\mathbb{Q}$ vers 0.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$ est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$:
On vérifie par récurrence que cette suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Q}$.
On vérifie également par récurrence que $a_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $a_n a_{n+1} = a_n + 2 > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mid a_{n+1} - a_n \mid &= \mid \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \mid \\ &= \mid \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \mid \\ &< \frac{1}{2} \mid a_n - a_{n-1} \mid . \end{aligned}$$

Par récurence sur n, on montre :

$$\mid a_{n+1} - a_n \mid < \frac{1}{2^n} \mid a_1 - a_0 \mid .$$

On pose $a = \frac{1}{2}$, *donc pour* $m > n$:

$$\begin{aligned}
\mid a_m - a_n \mid &= \mid \sum_{k=n}^{k=m-1} (a_{k+1} - a_k) \mid \\
&\leq \sum_{k=n}^{k=m-1} \mid (a_{k+1} - a_k) \mid \\
&\leq \sum_{k=n}^{k=m-1} a^k \mid a_1 - a_0 \mid \\
&\leq \frac{a^n}{1-a} \mid a_1 - a_0 \mid \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow +\infty$ *ce qui implique que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy car* $a = \frac{1}{2} < 1$. *Supposons que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est conergente dans* $\mathbb{Q}$ *et soit* l *sa limite, donc forcèment* l *verfie l'équation*

$$l = 2 + \frac{1}{l},$$

or les solutions de cette dernière équation $(1-\sqrt{2}$ *et* $1+\sqrt{2})$ *ne sont pas dans* $\mathbb{Q}$ *car* $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel, d'où la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente dans* $\mathbb{Q}$.

c) *Montrons que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres rationnels définie par* $a_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ *est de Cauchy, mais non convergente dans* $\mathbb{Q}$: *On vérifie facilement que cette suite est bien définie et à valeurs dans* $\mathbb{Q}$: *Pour* $m > n > 2$; *on a :*

$$\begin{aligned}
\mid a_m - a_n \mid &= \sum_{k=m}^{k=n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{(n+2)...(m-1)m}) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2 n!} \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ce qui implique que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy.*
Supposons qu'elle soit convergente vers un rationnel $r = \frac{p}{q}$ *où* $p; q$

sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Pour tout $n > q$ *; le nombre*

$$p_n = n!(r - a_n) = n! lim_{m \longrightarrow +\infty}(a_m - a_n)$$

est un entier strictement positif avec :

$$\begin{aligned} 0 < n! \times (a_m - a_n) &\leq n! \frac{n+2}{(n+1)^2 n!} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pour $m > n > 2$; *ce qui implique*

$$0 < p_n < 1$$

dans $\mathbb{N}$ *qui est impossible. En effet* p_n *est un entier naturel puisque pour* $n > q$ *et*

$$n!(r_n - a_n) = n! \frac{p}{q} - n! a_n \in \mathbb{N},$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *strictement croissante et* $r = \lim_{n\to+\infty} a_n$ *donc* $r > a_n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$. *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc non convergente dans* $\mathbb{Q}$.

Exercice 1.2.1.
1. Montrer que $\forall\ u \in \mathfrak{E}$, $\forall\ v \in \mathfrak{E}$, $u + v \in \mathfrak{E}$ *;* $u \times v \in \mathfrak{E}$ *et* $\lambda u \in \mathfrak{E}$. *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{Q}$*)*
2. Montrer que $\forall\ u \in \mathfrak{E}$, $\forall\ v \in \mathfrak{E}$, $u - v \in \mathfrak{E}$
3. Montrer que $\forall\ u \in \mathfrak{E}$, $\forall\ v \in \mathfrak{E}$, $u \times v \in \mathfrak{E}$ *:*

Solution. Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}; (r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy rationnelles. $\forall\ \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$

$$\begin{aligned} \exists N_1 &\in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N_1 \text{ et } m \geq N_1) \Rightarrow |r_n - r_m| < \varepsilon/2, \\ \exists N_2 &\in \mathbb{N} \text{ tel que } (p \geq N_2 \text{ et } q \geq N_2) \Rightarrow \left| r'_p - r'_q \right| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Ce qui exprime que $(r_n)_{n\geq 0}$ et $(r'_p)_{p\geq 0}$ sont dans $\mathfrak{E}$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors $(\forall\ n \geq N$ et $\forall m \geq N)$ on a

$$\begin{aligned} \left| (r_n + r'_n) - (r_m + r'_m) \right| &\leq |r_n - r_m| + \left| r'_n - r'_m \right| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant nous allons montrer que la multiplication d'une suite de Cauchy par un scalaire est une suite de Cauchy. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et $\lambda \in \mathbb{Q}^*$. Pour un $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tous entiers n et m, $n \geq N$ *et* $m \geq N$, $|\lambda||r_n - r_m| < |\lambda|\epsilon$. Ceci montre que la suite $(\lambda r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, l'application

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ \epsilon \longrightarrow |\lambda|\epsilon \end{array}$$

est une bijection.
Pour montrer que la multiplication de deux suite de Cauchy est une suite de Cauchy, on a besoin du résultat suivant.

Lemme 1.2.1. *Toute suite de Cauchy d'élément de* $\mathbb{Q}$ *(i.e. appartenant à* $\mathfrak{E}$*) est bornée.*

Preuve.
Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour $\epsilon = 1, \exists N_1 \in \mathbb{N}$:
$\forall n \geq N_1,\ \forall m \geq N_1$ on a

$$|r_n - r_m| < \epsilon$$

ce qui veut dire que

$$-\epsilon + r_m < r_n < \epsilon + r_m.$$

Pour $m = N$ on a :
$\forall n \geq N$, $-\epsilon + r_N < r_n < \epsilon + r_N$
ce qui donne
$|r_n| \leq sup(|\epsilon + r_N|, |-\epsilon + r_N|) = \alpha.$
Soit $\beta = sup(|r_0|, |r_1|, .., |r_N|)$ alors $|r_n| \leq sup(\alpha, \beta)\ \forall n \in \mathbb{N}$,
ce qui montre que la suite est bornée.
Maintenant, on est en mesure de montrer que le produit de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy. Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy. On a

$$\begin{aligned} |r_n r'_n - r_m r'_m| &= |r_n(r'_n - r'_m) + r_n r'_m - r_m r'_m| \\ &\leq |r_n||r'_n - r'_m| + |r_n - r_m||r'_m| \\ &\leq |r_n|\frac{\epsilon}{2} + |r'_m|\frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon\left(\frac{|r_n| + |r'_m|}{2}\right) \\ &\leq \epsilon\ sup_{n\in\mathbb{N}}\{|r_n|, |r'_n|\}. \end{aligned}$$

On résume donc les propriétés précédentes dans la proposition suivante

Proposition 1.2.1. *1) Une suite qui converge dans $\mathbb{Q}$ est une suite de Cauchy.*
2) La somme, le produit de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée.
4. Il existe des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas convergentes dans $\mathbb{Q}$.

L'objet de la proposition suivante est de montrer qu'une suite de Cauchy qui ne converge pas vers zero est "loin" de zero.

Proposition 1.2.2. *Pour tout $u \in \mathfrak{C}\backslash\{\mathcal{I}\}$, il existe $a \in \mathbb{Q}_*^+$ et un $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*
ou bien $\forall n \geq n_0$; $u_n \geq a$
ou bien $\forall n \geq n_0$; $u_n \leq -a$.
De plus la suite rationelle : $b_0 = 1 = b_1 = ... = b_{n_0}$ et $b_n = \frac{1}{u_n}$ pour $n > n_0$ est une suite de Cauchy.
Une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{Q}$ est, à partir d'un certain rang, minorée par un rationnel strictement positif ou majorée par un rationnel strictement négatif. En particulier, la suite est alors de signe constant et ne s'annule pas (toujours à partir d'un certain rang).

Démonstration. Soit donc u une suite de Cauchy ne convergeant pas vers 0, et supposons le résultat faux, c'est-à-dire que pour tout rationnel a strictement positif et tout entier n, on puisse trouver : Un entier $n_1 \geq n$ tel que $u_{n_1} < a$; un entier $n_2 \geq n$ tel que $u_{n_2} > -a$. Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que pour $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on ait $|u_n - u_p| < \frac{\varepsilon}{3}$. En appliquant notre hypothèse de raisonnement par l'absurde à $a = \frac{\varepsilon}{3}$ et $n = n_0$, on trouve deux entiers $n_1 \geq n_0$ et $n_2 \geq n_0$, tels que $u_{n_1} < \frac{\varepsilon}{3}$ et $u_{n_2} > -\frac{\varepsilon}{3}$. Mais alors, par définition de n_0, on a donc $|u_{n_1} - u_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{3}$, et donc : $u_{n_1} = u_{n_2} + (u_{n_1} - u_{n_2}) > -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3}$ c'est-à-dire $-2\frac{\varepsilon}{3} < u_{n_1} < \frac{\varepsilon}{3}$ et donc $|u_{n_1}| < 2\frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a donc $|u_n| = |u_{n_1} + (u_n - u_{n_1})| \leq |u_{n_1}| + |u_n - u_{n_1}| < \varepsilon$. Cela signifie donc que la suite u converge vers 0, ce qui contredit notre hypothése.
D'autre part pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$ on a

$$| b_m - b_n |=| \frac{1}{u_m} - \frac{1}{u_n} |= \frac{| u_m - u_n |}{| u_n u_m |} \leq \frac{| u_m - u_n |}{a^2},$$

on peut donc vérifier facilement que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy rationnelle.

On veut définir les nombres réels $\mathbb{R}$ comme les limites des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Mais il est clair qu'on peut avoir plusieurs suites qui ont "la même limite" donc il faut prendre les classes d'équivalence des suites :

Définition 1.2.4. *Sur l'ensemble $\mathfrak{C}$ des suites de Cauchy rationnelles, on définit la relation binaire $\sim$ par :*

$$u \sim v \Longleftrightarrow u - v \in \mathcal{I},$$

c'est à dire pour $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{C}$

$$(r_n)_n \sim (s_n)_n \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n - r_n = 0.$$

Remarque 1.2.1. *On vérifie sans difficulté que $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathfrak{C}$. Elle vérifie les trois propriétés suivantes.*
i) Reflexivité : on a $(r_n)_n \sim (r_n)_n$ $\forall$ $(r_n)_n \in \mathfrak{C}$.
ii) Symétrie : on a $(r_n)_n \sim (s_n)_n \Longrightarrow (s_n)_n \sim (r_n)_n$.
iii) Transitivité : On a $(r_n)_n \sim (s_n)_n$: $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(s_n - r_n) = 0$
$(s_n)_n \sim (t_n)_n$: $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(t_n - s_n) = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} t_n - r_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n - r_n + \lim_{n\longrightarrow+\infty} t_n - s_n = 0.$$

Définition 1.2.5. *On appelle nombre réel une classe d'équivalence de suites rattionelle de Cauchy pour la relation $\sim$. L'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, peut donc être défini comme l'ensemble quotient $\mathfrak{C}/\sim$ (encore noté $\mathfrak{C}/\mathcal{I}$).*

Exercice 1.2.2. *Montrer que*
i) *$(r_n)_n \sim (r'_n)_n$ et $(s_n)_n \sim (s'_n)_n$ entraine $(r_n + s_n)_n \sim (r'_n + s'_n)_n$.*
ii) *$\overline{(r_n + s_n)}_{n\geq 0}$ ne dépend pas des représentants choisis pour $\overline{(r_n)}_{n\geq 0}$ et $\overline{(s_n)}_{n\geq 0}$.*

Solution.
i/ On a $(r_n)_n \sim (r'_n)_n$ est équivaut à $\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n - r'_n = 0$, de même $(s_n)_n \sim (s'_n)_n$ est équivaut à $\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n - s'_n = 0$.
Donc on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(r_n + s_n) - (r'_n + s'_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n - r'_n + \lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n - s'_n = 0$$

ii/ Il suffit de voir que si $(r_n)_n \sim (r'_n)_n$ et $(s_n)_n \sim (s'_n)_n$ alors

$$\overline{(r_n + s_n)}_{n\geq 0} = \overline{(r'_n + s'_n)}_{n\geq 0}.$$

1.3 Propriétés de $\mathbb{R}$.

On définit sur $\mathbb{R}$ les lois suivantes qui prolongent celles de $\mathbb{Q}$.

1) Addition.

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\overline{(x_n)_n}, \overline{(y_n)_n}) \longrightarrow \overline{(x_n)_n} + \overline{(y_n)_n} = \overline{(x_n+y_n)_n} \end{array}$$

2) Multiplication.

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\overline{(x_n)_n}, \overline{(y_n)_n}) \longrightarrow \overline{(x_n)_n}\,\overline{(y_n)_n} = \overline{(x_n y_n)_n} \end{array}$$

3) Multiplication par un scalaire. C'est un cas particulier de la multiplication, car il s'agit de multiplier par une suite constante.

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\overline{\lambda}, \overline{(y_n)_n}) \longrightarrow \overline{\lambda}\overline{(y_n)_n} = \overline{(\lambda y_n)_n} \end{array}$$

Les deux premières lois sont des lois de compositions internes.
Soient $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ des représentants respectifs des nombres réels x, y *et* z. Alors $(x+y)+z$ est la classe d'équivalence de la suite $((x_n+y_n)+z_n)_n$ et $x+(y+z)$ est la classe d'équivalence de la suite $(x_n+(y_n+z_n))_n$. Or dans $\mathbb{Q}$, on a $(x_n+(y_n+z_n)) = ((x_n+y_n)+z_n)$. Il en résulte donc que $(x+y)+z = x+(y+z)$. L'addition est donc associative. On montre de la même façon qu'elle est commutative. La classe de la suite nulle en l'occurence l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ n & \mapsto & r_n = 0 \end{array}$$

notée aussi $(0,0,..0,..)$ ou tout simplement $0 \in \mathbb{R}$, est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$. La classe x de $(x_n)_{n\geq 0}$ admet pour opposé, la classe $(-x_n)_{n\geq 0}$ (notée $-x$). En conclusion l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition est un groupe abélien.

1.3.1 Structure de $\mathbb{R}$.

A) L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication est un anneau commutatif unitaire. En effet

i) D'aprés ce qui precéde $\mathbb{R}$ muni de l'addition est un groupe commutatif.

ii) La classe de la suite $(1, ..1, ..)$ est l'élément neutre pour la multiplication. Cette classe est notée 1.

iii) $xy = yx$ car dans $\mathbb{Q}$, les deux suites $(x_n y_n)_n$ et $(y_n x_n)_n$ sont égales vue que $\mathbb{Q}$ est commutatif pour la multiplication.

iv) La multiplication est distributive par rapport à l'addition. En effet

$$\begin{aligned} ((x_n(y_n + z_n))_n &= (x_n y_n + x_n z_n)_n \\ &= (x_n y_n)_n + (x_n z_n)_n. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire que $x(y + z) = xy + xz$.

B) L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif. Il reste à démontrer que tout élément non nul α de $\mathbb{R}$, admet un inverse noté α^{-1} tel que

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1.$$

Mais avant, nous remarquons que si α est un nombre réel non nul, et si $a = (a_1, ..a_n, ..)$ est un représentant de α (c'est-à-dire il existe une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ tel que :

$$\overline{(a_n)}_{n\geq 0} = \alpha,$$

alors les termes de la suite sont tous non nuls à partir d'un certain rang (Proposition 1.2.2 ; pp :19).

$$[i.e.\ \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq N, \text{ on a : } a_n \neq 0].$$

Soit alors b la suite définie par : $b_0 = ... = b_N = 1$ et pour $n > N$, $b_n = a_n$. La suite b ainsi construite ne s'annulle pas, donc est inversible, d'inverse $\frac{1}{b} = (\frac{1}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, la suite $a - b$ étant par construction nulle à partir du rang N, elle est dans $\mathcal{I}$, et d'après la proposition 1.2.2, la suite b est de Cauchy, donc $b \in \overline{u}$. Il vient $\overline{a} \times \overline{\frac{1}{b}} = \overline{b} \times \overline{\frac{1}{b}} = \overline{(1)_{n\in\mathbb{N}}}$ c'est-à-dire que le réel $\overline{a} = \alpha$ est inversible.

1.3.2 Relation d'ordre.

Notations et préliminaires

On note $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) l'ensemble des nombres réels admettant un représentant (r_n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, r_n \geq 0 \text{ (resp. } r_n \leq 0).$$

On a $0 \in \mathbb{R}_+$ et $0 \in \mathbb{R}_-$. De plus, il est facile de vérifier que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_+ & \subset & \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{R}_+\mathbb{R}_+ & \subset & \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- & = & \{0\} \\ \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- & = & \mathbb{R}. \end{array}$$

Nous allons montrer que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$. Soit $\overline{(x_n)}_n$ un élément de $\mathbb{R}$. Si $(x_n)_n \sim 0$ (la suite nulle) alors $(x_n)_n \sim (\frac{1}{n})_n$ et $(x_n)_n \sim (\frac{-1}{n})_n$ donc $(x_n)_n \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$. Si par contre $(x_n)_n$ n'est pas équivalente à la suite nulle alors :

$$\exists \epsilon_0 > 0,\ (\epsilon_0 \in \mathbb{Q}),\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \textit{ tel que } |x_n| \geq \epsilon_0.$$

Posons $I = \{n \in \mathbb{N}/x_n \geq \epsilon_0\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N}/x_n \leq -\epsilon_0\}$. L'un de ces deux sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est fini. Car sinon,

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in I,\ n \geq N \textit{ tel que } x_n \geq \epsilon_0$$

et

$$\exists m \in J,\ m \geq N \textit{ tel que } x_m \leq -\epsilon_0.$$

Cela implique que

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists (n,m) \in I \times J \textit{ tel que } n \geq N,\ m \geq N \textit{ et } x_n - x_m > 2\epsilon_0$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ n'est pas de Cauchy (absurde). Supposons que I est infini et que J est fini. Posons $N_1 = max(J)$. Alors

$$\forall n \in I,\ n \geq N_1;\ x_n \geq \epsilon_0$$

ce qui veut dire que $\overline{(x_n)}_n \in \mathbb{R}_+$. Il faut remarquer que si on suppose que J est infini et que I est fini alors, on aura $\overline{(x_n)}_n \in \mathbb{R}_-$.

Relation d'ordre

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$. On définit la relation $\leq$ par

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+.$$

c'est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$. En effet
i/ Réflexivité, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a $x \leq x$ car $0 \in \mathbb{R}_+$.
ii/ Antisymétrie,

$$\begin{aligned} x &\leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x - y \in \mathbb{R}_+ \\ x &\leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } y - x \in \mathbb{R}_- \\ x &\leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-. \end{aligned}$$

On en déduit que $x = y$.
iii/ Transitivité,

$$\begin{aligned} x &\leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } z - y \in \mathbb{R}_+ \\ x &\leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow z - x \in \mathbb{R}_+ \\ x &\leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z. \end{aligned}$$

iv/ L'ordre est total car pour tous x, y éléments de $\mathbb{R}$ on a,

$$x - y \in \mathbb{R}_+ \text{ ou bien } y - x \in \mathbb{R}_+$$

donc $x \leq y$ ou bien $y \leq x$. Avant d'achever cette preuve il faut signaler que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, ...)$ dont le terme générale est $u_n = (-1)^n$, n'est pas de Cauchy. Donc, elle n'appartient pas à $\mathfrak{C}$.

Remarque 1.3.1. *Voici un eexemple de corps qui n'est pas ordonné. Soit $E = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ muni de l'addition et de la multiplication définient par les tables suivantes*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	1
1	1	0

IL est claire que $\{E, +, \times\}$ est un corps. Ce corps ne peut être ordonné par un ordre compatible avec ses lois : puisque $0 \not< 1$ et $1 \not< 0$. En effet, si $0 < 1$ (la démonstration est la même si on supose que $1 < 0$), alors $0 + 1 < 1 + 1$ ce qui veut dire que $1 < 0$. Par conséquent $0 = 1$ ce qui absurde.

1.3.3 Valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de a le nombre réel positif, noté $|a|$, donné par* $|a| = \begin{cases} a, & si\ a \geq 0\ ; \\ -a, & si\ a < 0. \end{cases}$

Proposition 1.3.1. *Pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$, la valeur absolue vérifie les propriétés suivantes*

1. $|a| \geq 0$, *l'égalité a lieu si et seulement si $a = 0$;*
2. $|ab| = |a||b|$;
3. *Inégalité triangulaire :* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Preuve. 1) Découle directement de la définition de la valeur absolue.
2) On a $|ab| = \begin{cases} -ab = |a||b|, & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont de signe opposé ;} \\ ab = |a||b|, & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont de même signe.} \end{cases}$
3) Si $ab \geq 0$, on a $|a+b| = |a| + |b|$ puisque a et b sont de même signe.
Si $ab < 0$, on a $|a + b| = \begin{cases} -a - b \leq |a| + |b|, & \text{si } a + b < 0\ ; \\ a + b \leq |a| + |b|, & \text{si } a + b \geq 0. \end{cases}$

Exercice 1.3.1. *Montrer, que pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$ les propriétés suivantes sont vérifiées*
i. $||a| - |b|| \leq |a - b|$;
ii. $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

Solution. i) Par l'inégalité trianguloaire, on a

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \ et\ |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

Ceci donne

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad et\ -(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

c'est à dire

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

ii) Un calcul similaire au précédent montre que la propriété ii) est aussi vérifié.

Exercice 1.3.2. *Soient $a,\ b,\ \epsilon \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Écrire, sans utiliser la valeur absolue les assertions suivantes*
i. $|a| \leq \epsilon$;
ii. $|a| > \epsilon$;
iii. $|a - b| > \epsilon$.

Chapitre 2

TOPOLOGIE DE LA DROITE RÉELLE

Par topologie de $\mathbb{R}$, nous visons une géométrie sur ses sous-ensembles ne tenant compte ni de la distance ni de la forme. C'est donc une géométrie qui étudie les propriétés des sous-ensemble de $\mathbb{R}$, qui sont invariants par des déformations continues. En ce sens, quand on jette dans la poubelle une feuille de papier aprés l'avoir froissée, elle ne change pas de topologie.

Dans ce deuxième chapitre, nous introduisons la définition d'un intervalle, d'un ouvert et d'un fermé. Nous définissons aussi la notion de point d'adhérence, de point d'accumulation et d'un point isolé. Nous précisons ensuite la notion de majorant, minorant, borne superieure, borne inferieure, plus grand élément et plus petit élément d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. La fin de ce chapitre est consacrée aux ensembles compacts et aux ensembles connexes de $\mathbb{R}$.

Le lecteur trouvera des situations pertinentes pour développer des compétences de bases et résoudre des problèmes dont les solutions utilisent des techniques et des méthodes topologiques.

2.1 Ouverts et fermés

Définition 2.1.1. *Un intervalle ouvert* $]a, b[$ $(a < b)$*, de* $\mathbb{R}$ *est l'ensemble des* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < x < b$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\}.$$

Exercice 2.1.1.
i) Montrer que $x \in]a, b[\Leftrightarrow \exists \lambda \in]0, 1[$ *telle que* $x = \lambda b + (1 - \lambda)a$.
ii) Montrer que tout intervalle $]a, b[$ *de* $\mathbb{R}$*, avec* $a < b$*, contient au moins un rationnel.*
Rappels : $\mathbb{Q}$ *est archimédien, c'est-à-dire*

$$\forall a \in \mathbb{Q}_+^*, \ \forall b \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } b \leq na.$$

Il est facile de remarquer que cette propriété provient du faite que $\mathbb{N}$ *n'est pas borné. On a alors la proposition suivante*

Proposition 2.1.1. $\mathbb{R}$ *est archimédien, c'est-à-dire*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall B \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } B \leq nA.$$

Solution de l'exercice 2.1.1
i/ Il suffit de remarquer que l'application définie comme suit

$$\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow &]a,b[\\ \lambda & \longmapsto & \lambda b + (1-\lambda)a \end{array}$$

est une bijection (c'est-à-dire à la fois injective et surjective). En effet,
· Pour l'injection, si $\lambda b - (1-\lambda)a = \lambda^{'} b - (1-\lambda^{'})a$ alors
$(\lambda - \lambda^{'})b + (\lambda^{'} - \lambda)a = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \lambda^{'})(b - a) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^{'}$ car $b \neq a$.
· Pour la surjection, si $x \in]a, b[$ alors $\frac{x-a}{b-a} b + (1 - \frac{x-a}{b-a})a = x$ et on a $\frac{x-a}{b-a} \in]0, 1[$.
ii/ Soit $]a, b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit $b^{'} \in]a, b[$, alors $b^{'} \in \mathbb{R}$ et $a < b^{'} < b$. Posons $x = b' - a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{1}{x} \leq n$. De plus il existe k appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $nb^{'} < k$, du faite que $\mathbb{N}$ n'est pas borné. Soit k_0 le plus petit entier naturel tel que

$$nb^{'} < k_0 \text{ ce qui entaîne que } nb^{'} \geq k_0 - 1.$$

Alors

$$a < \frac{k_0 - 1}{n} \leqslant b^{'} < b$$

car sinon

$$a \geq \frac{k_0 - 1}{n} \Rightarrow b' - a \leq b' - \frac{k_0 - 1}{n} < \frac{k_0}{n} - \frac{k_0 - 1}{n} = \frac{1}{n}$$

ce qui est absurde.

Preuve de la proposition 2.1.1 :

D'après l'exercice 2.1.1 ii/ il existe $a \in \,]0,\ A[$ et $b \in \,]B,\ B+1[$ rationnels. Or $\mathbb{Q}$ est archimédien donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b \leq na$ d'où $B < b \leq na \leq nA$.

Définitions 2.1.1. *Soit $\mathcal{U}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

- *On dit que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ s'il est vide ou si*

$$\forall x \in \mathcal{U},\ \exists]a, b[\ \text{ tel que } x \in \,]a, b[\, \subset \mathcal{U}.$$

- *On dit que F est un fermé de $\mathbb{R}$ s'il est le complémentaire d'un ouvert dans $\mathbb{R}$ (i.e. $\exists\ \mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $F = \complement_{\mathbb{R}}^{\mathcal{U}}$).*

Remarque 2.1.1. *Un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.*

En effet soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathcal{U}$ il exite a_x *et* b_x, $a_x < b_x$, tels que $x \in]a_x, b_x[\subset \mathcal{U}$. Donc $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}}]a_x,\ b_x[$.

Proposition 2.1.2.
O_1) Toute réunion finie ou infinie d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
O_2) Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
O_3) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Preuve. O_1) Soit $(\mathcal{U}\ _i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{U}_i$, alors il existe au moins $i_0 \in I$ tel que $x \in \mathcal{U}_{i_0}$, qui est ouvert. Donc il existe $a,\ b \in \mathbb{R}$, $(a < b)$ tels que $x \in \,]a, b[\, \subset \mathcal{U}_{i_0}$. Ce qui entraîne que

$$x \in \,]a, b[\, \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\ .$$

O_2) Soit J un ensemble fini d'indices et soit $x \in \bigcap\limits_{j \in J} \mathcal{U}_j$ supposée non vide. Alors, pour tout j dans J, $x \in \mathcal{U}_j$. Comme $\mathcal{U}_j$ est un ouvert, il existe $a_j,\ b_j \in \mathbb{R}$, $(a_j < b_j)$ tels que $x \in \,]a_j, b_j[\, \subset \mathcal{U}_j$. Ce qui implique que

$$x \in]\alpha, \beta[= \bigcap_{j \in J}]a_j, b_j[\subset \bigcap_{j \in J} \mathcal{U}_j,$$

où α (resp.β) est le plus grand des a_j (resp. le plus petit des b_j), $j \in I$. Puisque le plus grand des a_j (resp. le plus petit des b_j) existe, car on a un nombre fini de nombres réels et $\mathbb{R}$ est muni d'un ordre total, alors on peut les ordonner du plus petit au plus grand. Donc, pour tout sous ensemble fini d'indices J, $\bigcap\limits_{j\in J}\mathcal{U}_j$ est un ouvert. On achève cette démonstration en signalant que l'intersection de deux intervalles ouverts qui ont au moins un point commun est un intervalle ouvert. La définition des fermés, nous permet d'énoncer l'exercice suivant

Exercice 2.1.2.
F_1) *Toute intersection finie ou infinie de fermés est un fermé ;*
F_2) *Une réunion finie de fermés est un fermé ;*
F_3) $\mathbb{R}$ *et* $\emptyset$ *sont des ouverts et des fermés.*

solution *: Soient* $(F_i)_{i\in I}$ *une famille de fermés et* $\mathcal{U}_i = \complement_{\mathbb{R}}^{F_i},\ i \in I$. *Les* $\mathcal{U}_i$ *sont alors des ouverts de* $\mathbb{R}$. *D'un coté, on a*

$$\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i = \complement_{\mathbb{R}}^{\bigcap_{i\in I}F_i}$$

ce qui montre que $\bigcap_{i\in I}F_i$ *est fermé. D'un autre coté, pour tout sous-ensemble fini* J *de* I, *on a*

$$\bigcap_{i\in J}\mathcal{U}_i = \complement_{\mathbb{R}}^{\bigcup_{i\in J}F_i}$$

ce qui montre que $\bigcup_{i\in J}F_i$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$.

Remarques 2.1.1.
1) L'intersection d'une infinité d'ouverts n'est pas toujours un ouvert. Il suffit de considérer $\bigcap\limits_{n>0}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\}$ *qui est fermé car*

$$\complement_{\mathbb{R}}^{\{0\}} =]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\quad \textit{est un ouvert.}$$

2) La réunion infinie de fermés n'est pas toujours fermée. Il suffit de considérer
$\bigcup\limits_{n>0}\left[-1+\frac{1}{n},\,1-\frac{1}{n}\right] =]-1,1[$ *qui est un ouvert.*
3) Un ensemble peut être ni ouvert ni fermé. Prendre pour exemples $]0,1]$ *et* $\mathbb{Q}$. *En effet : pour l'intervalle* $]0,1]$,

$$\forall\epsilon>0,\ ]1-\epsilon,1+\epsilon[\ \not\subset\ ]0,1[$$

ce qui montre qu'on ne peut pas trouver des nombres réels $a < b$ tels que

$$1 \in]a, b[\subset]0, 1[.$$

Pour $\mathbb{Q}$, il suffit de remarquer que tout intervalle $]a, b[$ contient des nombres irrationnels, (voir exercice).

Définition 2.1.2. *On appelle voisinage d'un élément x de $\mathbb{R}$, tout sous ensemble V de $\mathbb{R}$ contenant un ouvert O qui contient x. Autrement dit, V est un voisinage de x si, et seulement si,*

$$\exists O \text{ ouvert, tel que } x \in O \subset V.$$

Proposition 2.1.3. *$A \subset \mathbb{R}$ est un ouvert si, et seulement si, A est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. Si A est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors pour tout a appartenant à A on a : $a \in A \subset A$, ce qui montre que A est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si A est voisinage de chacun de ses points, alors

$$\forall a \in A, \exists O_a \text{ ouvert tel que } a \in O_a \subset A$$

ce qui entraîne que

$$\bigcup_{a \in A} O_a \subset A$$

d'où l'égalité

$$\bigcup_{a \in A} O_a = A$$

ce qui montre que A est un ouvert de $\mathbb{R}$, comme étant réunion d'ouverts.

2.2 Point adhérent-Point d'accumulation

Définitions 2.2.1. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que x est un point adhérent à A si tout voisinage V de x rencontre A,*
  (i.e. $\forall\, V$ voisinage de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$.)
- *On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage V de x contient un point de A autre que x.*
  (i.e. $\forall\, V$ voisinage de x; $(V \backslash \{x\}) \bigcap A \neq \emptyset$.)

- *On dit que x est un point isolé de A si $x \in A$ sans être un point d'accumulation.*
  (i.e. $\exists V$ voisinage de x tel que $V \bigcap A = \{x\}$).

Exemples 2.2.1.
a) Tout point de $[0,1]$ est adhérent à $]0,1[$.
b) 0 est un point d'accumulation des ensembles : $]0,1[$ et $\left\{\frac{1}{n} \ / n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
c) Tous les points de $\left\{\frac{1}{n} \ / n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sont isolés.

Preuve. a) Tous les éléments de $]0,1[$ sont adhérents à $]0,1[$ car pour tout élément $x \in]0,1[$ et pour tout nombre ϵ strictement positif on a

$$]x-\epsilon, x+\epsilon[\bigcap]0,1[\neq \emptyset.$$

De plus,

$$]-\epsilon, \epsilon[\bigcap]0,1[\neq \emptyset$$

ceci entraîne que 0 est adhérent à $]0,1[$, et

$$]1-\epsilon, 1+\epsilon[\bigcap]0,1[\neq \emptyset$$

implique que 1 est adhérent à $]0,1[$.
b) Nous avons $(]-\epsilon,\epsilon[\backslash\{0\})\bigcap]0,1[\neq \emptyset$ et $(]-\epsilon,\epsilon[\backslash\{0\})\bigcap\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\} \neq \emptyset$ car, pour tout nombre $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\epsilon} < n$.
c) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, les nombres $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n-1}$ encadrent $\frac{1}{n}$. On a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$. D'où si $\alpha = \frac{1}{n(n-1)}$, on a $]\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{n}+\frac{\alpha}{2}[\bigcap\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\} = \{\frac{1}{n}\}$.

Proposition 2.2.1. *Une partie non vide A de $\mathbb{R}$, est fermée si et seulement si A contient tous ses points d'accumulation.*

Preuve. Soit A une partie non vide fermée dans $\mathbb{R}$ et soit x un point d'accumulation de A. Supposons que $x \notin A$, alors $x \in \complement_{\mathbb{R}}^A$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc il va contenir un point de A autre que x, ce qui est absurde (i.e. $(\complement_{\mathbb{R}}^A\backslash\{x\})\bigcap A \neq \emptyset$). Donc $x \in A$. Supposons maintenant que A contient tous ses points d'accumulation. Cela veut dire qu'aucun point de $\complement_{\mathbb{R}}^A$ n'est point d'accumulation de A. Soit x un élément de $\complement_{\mathbb{R}}^A$, il existe V voisinage de x tel que $V \cap A = \emptyset$. Ceci montre qu'il existe V voisinage de x tel que $V \subset \complement_{\mathbb{R}}^A$. Donc $\complement_{\mathbb{R}}^A$ est voisinage de chacun de ses points, donc $\complement_{\mathbb{R}}^A$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, ce qui montre que A est fermé.

2.3 Majorants et Minorants

Définitions 2.3.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$:*

- $M \in \mathbb{R}$ *est un majorant de A, si $\forall a \in A$, on a : $a \leq M$.*
- $m \in \mathbb{R}$ *est un minorant de A, si $\forall a \in A$, on a : $a \geqslant m$.*
- *A est bornée si $\exists k > 0$, tel que $|a| \leq k$ pour tout $a \in A$.*
- *$\alpha \in \mathbb{R}$ est dit plus grand élément de A, si $\alpha \in A$ et α est un majorant de A.*
- *$\beta \in \mathbb{R}$ est dit plus petit élément de A, si $\beta \in A$ et β est un minorant de A.*
- *On appelle borne supérieure de A, lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de A. On la note* $\sup A$.
- *On appelle borne inférieure de A, lorsqu'elle existe, le plus grand des minorants de A. On la note* $\inf A$.

Remarques 2.3.1. *Une partie de $\mathbb{R}$ peut avoir une borne supérieure sans avoir de plus grand élément, exemple : $A = [0, 1[$.*
La borne supérieure et le plus grand élément lorsqu'ils existent, sont égaux. C'est le cas pour un intervalle fermé à droite.

Théorème 1. *(Théorème de caractérisation)*
Soit $X \subset \mathbb{R}$

i) $M = \sup X \Leftrightarrow [\forall x \in X, x \leq M$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X$ tel que $x_\varepsilon > M - \varepsilon]$.

ii) $m = \inf X \Leftrightarrow [\forall x \in X, x \geqslant m$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in X$ tel que $y_\varepsilon < m + \varepsilon]$.

Preuve. L'hypothèse $M = \sup X$, entraîne que M est un majorant de X donc

$$x \leqslant M, \ \forall x \in X.$$

De plus M est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ M - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A.$$

Donc $\exists x_\varepsilon \in X$ tel que $x_\varepsilon > M - \varepsilon$.

Exercice 2.3.1. *Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).*

Preuve. Soit X un sous ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$x \leq M \ (\forall x \in X).$$

Notons $B = \{b \in \mathbb{R} / b \geq x, \ \forall x \in X\}$ et $C = \mathbb{R} \backslash B$ On a

i) B est non vide car $M \in B$,

ii) $[M, +\infty[\subset B$,

iii) $B \cap C = \emptyset$ et $B \cup C = \mathbb{R}$,

iv) C est non vide car si $x \in X$ alors $]-\infty, x[\subset C$.

D'autre part, on a

$$\forall a \in C \text{ et } \forall b \in B;\ c < b.$$

En effet, pour tout $c \in C$, s'il existe $b \in B$ tel que $c \geq b$, alors b va appartenir à C ce qui est absurde. Maintenant du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien, alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall (c, b) \in C \times B,\ \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

tels que

$$p\epsilon > -c \text{ et } q\epsilon > b,$$

ce qui s'écrit aussi

$$-p\epsilon < c < b < q\epsilon.$$

Notons pour $\epsilon > 0$ donné $\mathbb{Z}_C^\epsilon = \{p \in \mathbb{Z} / -p\epsilon \in C\}$. $\mathbb{Z}_C^\epsilon$ est non vide (d'après ce qui précéde) et est minoré car C est majoré. Soit $n_\epsilon = min(\mathbb{Z}_C^\epsilon)$, alors on a :$\begin{cases} -n_\epsilon.\epsilon \in C \\ -(n_\epsilon - 1).\epsilon \in B \end{cases}$ et $-(n_\epsilon - 1).\epsilon - (-n_\epsilon.\epsilon) = \epsilon$. Remplaçons ϵ par $\frac{1}{r}$, $r \in \mathbb{N}^*$; alors il existe $(c_r, b_r) \in C \times B$ telles que :$c_r = -n_r.\frac{1}{r} \in C$, $b_r = -(n_r - 1).\frac{1}{r} \in B$ et $b_r - c_r = \frac{1}{r}$. On construit anisi deux suites $(c_r)_{r\in\mathbb{N}^*} \subset C$ et $(b_r)_{r\in\mathbb{N}^*} \subset B$ telles que $\begin{cases} c_r < b_r, \\ b_r - c_r = \frac{1}{r}. \end{cases}$ Ces suites $(c_r)_r$ et $(b_r)_r$ qui sont adjacentes. En effet $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$c_p \leq b_n \Rightarrow c_p - c_n \leq b_n - c_n \leq \frac{1}{n}$$

et on a

$$c_n \leq b_p \Rightarrow c_n - c_p \leq b_p - c_p \leq \frac{1}{p}.$$

Ce qui entraine que $|c_n - c_p| \leq sup(\frac{1}{n}, \frac{1}{p})$ et cela montre que la suite $(c_n)_n$ est de Cauchy, donc $(c_n)_n$ est une suite convergente. De plus les inégalités

$$0 < b_n - c_n \leq \frac{1}{n}$$

montre que

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Montrons que
$$\alpha = \inf B = \sup C = \sup X.$$
En effet,
$$\forall x \in X ; x \leq \alpha,$$
car sinon, il existe $x_0 \in X$ et $x_0 > \alpha$. Donc pour : $\epsilon = x_0 - \alpha > 0$, il va exister $b_\epsilon \in B$ vérifiant
$$\alpha \leq b_0 < \alpha + \frac{\epsilon}{2} < x_0$$
ce qui est impossible car b_0 est un majorant de X. De plus $\alpha - \epsilon$ n'est pas un majorant de X donc
$$\forall \epsilon,\ \exists x_1 \in X \text{ tel que : } \alpha - \epsilon < x_1 \leq \alpha.$$
Ainsi α vérifie bien : $\alpha = \sup X$.

Théorème 2. *(Théorème de Cantor.)*
Pour tout système d'intervalles fermés emboités $I_n = [a_n, b_n]$ c'est-à-dire ($a_n \leqslant b_n$ et $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$), il existe $x \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Autrement dit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Preuve. Par hypothèse, $\forall n$, $m \in \mathbb{N}$ avec $n \leqslant m$, on a
$$a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \text{ et } b_n \geqslant b_m \geqslant a_m$$
donc $I = \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide majoré par b_1
et $J = \{b_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est non vide minoré par a_1.
Donc d'après le théorème précédent, I (resp. J) admet une borne supérieure a (resp. une borne inférieure b). On montre que $a \leq b$. En effet si $a > b$ alors $a - b > 0$ or pour tout $\epsilon > 0$
$$\exists N_1 : \ n \geq N_1 \Rightarrow a - \epsilon < a_n \leq a$$
$$\exists N_2 : \ m \geq N_2 \Rightarrow b \leq b_m < b + \epsilon.$$
Posons alors $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq max(N_1, N_2)$ on a :
$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < a_n \\ b_n < \frac{a+b}{2} \\ a_n \leq b_n \end{cases}$$

ce qui est absurde. Ainsi on a pour tout entier naturel n

$$[a,b] \subset [a_n, b_n]$$

car $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$ ce qui implique que $[a,b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Corollaire 2.3.1. *Soit* $I_n = [a_n, b_n]$, *(*$n \in \mathbb{N}$*), un système d'intervalles fermés emboités. Alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *est réduite à un point si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } b_n - a_n < \varepsilon.$$

Preuve. On a
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\alpha\} \Longleftrightarrow \sup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \inf \{b_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \alpha$.
Supposons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$, alors

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_p \leqslant \alpha \ \textit{et}\ \exists q \in \mathbb{N} \text{ tel que } \alpha \leqslant b_q < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $N = \max(p, q)$, on aura

$$\alpha - \varepsilon/2 < a_N \leqslant \alpha \leqslant b_N < \alpha + \varepsilon$$

donc

$$b_N - a_N \leqslant b_p - a_p \leqslant (\alpha + \varepsilon/2) - (\alpha - \varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Inversement, supposons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n - a_n < \varepsilon$, alors

$$\inf \{b_m \ / \ m \in \mathbb{N}\} \leqslant b_n \leqslant a_n + \varepsilon \leqslant \sup \{a_m \ / \ m \in \mathbb{N}\} + \varepsilon.$$

Comme ces deux inégalités sont vraies pour tout ε strictement positif, alors

$$\inf \{b_m \ / \ m \in \mathbb{N}\} \leqslant \sup \{a_m \ / \ m \in \mathbb{N}\}.$$

On en déduit que $\inf\{b_m/m \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_m/m \in \mathbb{N}\}$ égalité des deux termes, car le $\sup\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ est toujours inferieur ou égal à l'$\inf\{b_n/n \in \mathbb{N}\}$.

2.4 Adhérence et Intérieur

Définitions 2.4.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

- *On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.*
- *On appelle intérieur de A et on note $\overset{o}{A}$, le plus grand des ouverts contenus dans A.*

Exemples 2.4.1.

1. *Pour $A =]0,1]$ on a $\overline{A} = [0,1]$ et $\overset{o}{A} =]0,1[$*
2. *Pour $B = \{\frac{1}{n+1} / \ n \in \mathbb{N}\}$, $\overline{B} = B \bigcup \{0\}$ et $\overset{o}{B} = \emptyset$*
3. *Pour $C = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \leq 1\}$, $\overline{C} = \{0\}$ et $\overset{o}{C} = \emptyset$*
4. *Pour $D = [-1,2[\bigcup\{3\}$, $\overline{D} = [-1,2] \bigcup \{3\}$ et $\overset{o}{D} =]-1,2[$*

Exercices 2.4.1. *Montrer les assertions suivantes*
i) $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
ii) $\overset{o}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

Preuve. i/ $\overline{A}$ est fermé car pour tout $x \in \complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$, x n'est pas un point adhérent à A. Donc il existe V voisinage ouvert de x tel que $x \in V$ et $V \cap A = \emptyset$. Ce qui entraîne que $V \subset \complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$ puisque aucun élément de V n'est adhérent à A. Ce qui veut dire que $\complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$ est voisinage de chacun de ses points, ou encore que $\overline{A}$ est un fermé. D'autre part, il est facile de voir que $A \subset \overline{A}$.
Inversement soit F un fermé contenant A. Alors

$$\overline{A} \subset F \Longleftrightarrow \complement_{\mathbb{R}}^{F} \subset \complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}.$$

Soit $x \in \complement_{\mathbb{R}}^{F}$, il existe alors V voisinage ouvert de x vérifiant

$$x \in V \text{ et } V \subset \complement_{\mathbb{R}}^{F} \text{ du faite que } \complement_{\mathbb{R}}^{F} \text{ est un ouvert.}$$

Ce qui entraîne que $x \in V$ et $V \cap F = \emptyset$ donc $x \in V$ et $V \cap A = \emptyset$
ce qui implique que $x \in \complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$, et donc $\complement_{\mathbb{R}}^{F} \subset \complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$.
ii/ La réunion de tous les ouverts contenus dans A est un ouvert contenu dans A. De plus c'est le plus grand ouvert ayant cette propriété. Donc elle est égale à $\overset{o}{A}$.

Proposition 2.4.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes*

i) A *est fermée* $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$;

ii) A *est ouverte* $\Longleftrightarrow A = \overset{o}{A}$.

Preuve. i) Si A est une partie fermée, alors A est un fermé contenant A et c'est le plus petit ayant cette propriété. Donc $A = \overline{A}$.
ii) si A est un ouvert, alors A est le plus grand ouvert contenu dans A. Par conséquent $A = \overset{o}{A}$. Les deux réciproques sont triviales.

Proposition 2.4.2. *On a les égalités et les inclusions suivantes*

1. $\complement_{\mathbb{R}}^{(\overset{o}{A})} = \overline{\complement_{\mathbb{R}}^{A}}$,
2. $\complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}} = \left(\complement_{\mathbb{R}}^{A}\right)^{o}$,
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
4. $\overset{o}{\overset{o}{A}} = \overset{o}{A}$, $(A \cap B)^{o} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$ *et* $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset (A \cup B)^{o}$.

Preuve. Il faut d'abord remarquer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. En effet, x appartenant à $\overline{A}$ est équivalent à

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{(x)};\ V \cap A \neq \emptyset,$$

où $\mathcal{V}_{(x)}$ indique l'emsenble de tous les voisinages de x. Et, comme $A \subset B$, ceci implique que

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{(x)};\ V \cap B \neq \emptyset.$$

Il en résulte donc que $x \in \overline{B}$ et par conséquent que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
1) On a les équivalence suivantes :

$$\begin{array}{rcl} x \notin \complement_{\mathbb{R}}^{\overset{o}{A}} & \Leftrightarrow & x \in \overset{o}{A} \\ & \Leftrightarrow & \exists\, V \textit{ voisinage de } x \textit{ tel que } V \subset A \\ & \Leftrightarrow & \exists\, V \textit{ voisinage de } x \textit{ tel que } V \cap \complement_{\mathbb{R}}^{A} = \emptyset \\ & \Leftrightarrow & x \notin \overline{\complement_{\mathbb{R}}^{A}}. \end{array}$$

Ceci montre que $\overline{\complement_{\mathbb{R}}^{A}} = \complement_{\mathbb{R}}^{\overset{o}{A}}$.
Remarquer que,

$$\overline{\complement_{\mathbb{R}}^{A}} \subset \complement_{\mathbb{R}}^{\overset{o}{A}}$$

est facile à montrer. En effet comme $\overset{o}{A} \subset A$ on a $\complement_{\mathbb{R}}^{A} \subset \complement_{\mathbb{R}}^{\overset{o}{A}}$ ce qui donne $\overline{\complement_{\mathbb{R}}^{A}} \subset \overline{\complement_{\mathbb{R}}\overset{o}{A}} = \complement_{\mathbb{R}}^{\overset{o}{A}}$, car $\overset{o}{A}$ (resp. $\complement_{\mathbb{R}}^{\overset{o}{A}}$) est un ouvert (resp. un fermé.
2) On a les équivalence suivantes

$$\begin{aligned} x \in \complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}} &\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \exists\, V \textit{ voisinage de } x \textit{ tel que } V \cap A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists\, V \textit{ voisinage de } x \textit{ tel que } V \subset \complement_{\mathbb{R}}^{A} \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{o}{\complement_{\mathbb{R}}^{A}}. \end{aligned}$$

Remarquer aussi que la démonstration de $\complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}} \subset \overset{o}{\complement_{\mathbb{R}}^{A}}$ est immédiate du faite que l'on a $A \subset \overline{A}$ implique $\complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}} \subset \complement_{\mathbb{R}}^{A}$. Ceci donne le résultat cherché puisque $\overset{o}{\complement_{\mathbb{R}}^{A}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\complement_{\mathbb{R}}^{A}$ et que $\complement_{\mathbb{R}}^{\overline{A}}$ est un ouvert contenu dans $\complement_{\mathbb{R}}^{A}$.
3) D'aprés i) de l'exercice 2.4.1, $\overline{A}$ est un fermé donc $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Nous avons,

$$A \subset \overline{A} \textit{ et } B \subset \overline{B},$$

donc

$$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

qui est un fermé contenant $A \cup B$, donc

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

car $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$.
Réciproquement, A (resp. B) est contenu dans $A \cup B$. Donc $\overline{A}$ (resp. $\overline{B}$) est contenu dans $\overline{A \cup B}$. On en déduit que

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Montrons l'inclusion pour l'intersection. Nous avons

$$A \cap B \subset A \textit{ et } A \cap B \subset B$$

donc

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \textit{ et } \overline{A \cap B} \subset \overline{B}$$

ce qui implique que
$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$
Nous allons donner un exemple où
$$\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}.$$
Prenons $A = [0, 1[$ *et* $B =]1, 2]$. Nous avons $\overline{A} = [0, 1]$ *et* $\overline{B} = [1, 2]$ et par conséquent
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \ et\ \overline{A \cap B} = \emptyset$$
puisque $A \cap B = \emptyset$.

4) D'aprés ii) de l'exercice 2.4.1, $\overset{o}{A}$ est un ouvert donc $\overset{o}{\overset{o}{A}} = \overset{o}{A}$. Ensuite pour la réunion, nous avons
$$\overset{o}{A} \subset A \ et\ \overset{o}{B} \subset B$$
ce qui donne $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset A \cup B$. Donc, $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset A \overset{o}{\cup} B$ puisque $A \overset{o}{\cup} B$ est le plus grand ouvert contenu dans $A \cup B$.
L'exemple suivant, montre que l'inclusion peut être sticte. Il suffit de prendre $A =]0, 1]$ *et* $B = [1, 2]$. Nous avons alors $\overset{o}{A} =]0, 1[$ *et* $\overset{o}{B} =]1, 2[$ d'où $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} =]0, 1[\cup]1, 2[$ et $A \overset{o}{\cup} B =]0, 2[$.
Pour l'intersection, nous avons
$$\overset{o}{A} \subset A \ et\ \overset{o}{B} \subset B$$
ce qui donne $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset A \cap B$. Donc, $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset A \overset{o}{\cap} B$ car d'une part $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$ est un ouvert, d'autre part $A \overset{o}{\cap} B$ est le plus grand ouvert contenu dans $A \cap B$.
Réciproquement $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{array}\right\}$. Ceci implique que $\left\{\begin{array}{l} A \overset{o}{\cap} B \subset \overset{o}{A} \\ A \overset{o}{\cap} B \subset \overset{o}{B} \end{array}\right.$ Il en résulte l'inclusion, $A \overset{o}{\cap} B \subset \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$.

Remarque 2.4.1. *Pour toute partie non vide A de $\mathbb{R}$ on a*
$$\boxed{\overline{A} = A_{ac} \cup A_{iso}}$$
où $\overline{A}$, A_{ac} et A_{iso} désignent respectivement les points adhérents, les points d'accumulations et les points isolés de A.

Définitions 2.4.2. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, où I est un ensemble quelconque d'indices.*

- *On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de A, si $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.*
- *On dit que c'est un recouvrement ouvert (resp. fermé) si les A_i sont ouverts (resp. fermés).*
- *On dit que c'est un recouvrement fini, si I est fini (c'est-à-dire de cardinal fini).*

Exemples 2.4.2.

i) On pose $A_i = \left]\frac{1}{i+3}, \frac{1}{i+1}\right[$ (avec $i \in \mathbb{N}$). C'est un recouvrement ouvert de $A = \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

ii) On pose : $A_1 = \left]0, \frac{1}{5}\right]$; $A_2 = \left]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$; $A_3 = \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$; $A_4 = \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. C'est un recouvrement fini (qui n'est ni ouvert ni fermé) de $A =]0, \frac{1}{2}[$.

Définition 2.4.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est un compact de $\mathbb{R}$, si de tout recouvrement de A, on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Contre-exemple. Soit $A_i =]i, i+2[$ (avec $i \in \mathbb{Z}$). $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une famille qui recouvre $\mathbb{R}$. Donc c'est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$. Mais aucune sous famille finie de ce recouvrement ne peut recouvrir $\mathbb{R}$. En effet une telle sous famille va admettre un plus grand et un plus petit élément ce qui contredit le fait que $\mathbb{R}$ n'est pas borné. Donc, $\mathbb{R}$ considéré comme une partie de lui même n'est pas compact.

Théorème 3. *Tout compact K de $\mathbb{R}$ est à la fois fermé et borné.*

Preuve. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il est claire que,

$$K \subset \bigcup_{x\in K}]x-\epsilon, x+\epsilon[.$$

Il existe donc un nombre fini d'élément de K, $x_1,\ x_2 .... x_n$ tels que

$$K \subset \bigcup_{1\leq i\leq n}]x_i-\epsilon, x_i+\epsilon[.$$

Posons, $a = inf_{1\leq i\leq n}\{x_i - \epsilon\}$ et $b = sup_{1\leq i\leq n}\{x_i + \epsilon\}$. On a alors,

$$K \subset [a, b]$$

ce qui montre que K est borné. Montrons que K est fermé. D'abord si K est fini, il est fermé. Supposons donc que K est infini (i.e. K contient un nombre infini de nombre réels) et supposons que K n'est pas fermé. Dans ce cas (d'aprés 2.4.1) il existe x_0 point d'accumulation de K et $x_0 \notin K$. Soit $x \in K$, alors $x \neq x_0$. Donc $\exists r_x > 0$ tel que $]x - r_x, x + r_x[\cap]x_0 - r_x, x_0 + r_x[= \emptyset$. Il suffit de prendre : $0 < r_x < \frac{|x-x_0|}{2}$. Or

$$K \subset \bigcup_{x \in K}]x - r_x, x + r_x[$$

et comme K est compact, alors on peut en extraire un sous recouvrement fini de K. Soient $x_1,\ x_2....x_n$ des élément de K tels que

$$K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n}]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[$$

et soit

$$V_0 = \bigcap_{1 \leq i \leq n}]x_0 - r_{x_i}, x_0 + r_{x_i}[$$

V_0 est un voisinage ouvert de x_0 et

$$V_0 \cap (\bigcup_{1 \leq i \leq n}]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[) = \emptyset$$

en conséquence, $V_0 \bigcap K = \emptyset$; ce qui contredit le faite que $x_0 \in \overline{K}$.

Définition 2.4.2. *Un sous ensemble non vide C de $\mathbb{R}$ est dit connexe si C ne peut pas s'écrire comme réunion de deux ouverts (resp. fermés) disjoints de $\mathbb{R}$.*

Exemples 2.4.3.

1. *$C = [0, 1]$ est connexe et*
2. *$C = \mathbb{R}$ est aussi connexe.*

Contre exemple. Les parties $\mathbb{R}^*$ et $[0, 1] \bigcup [2, 3]$ ne sont pas connexe, ($\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$).

Théorème 4. *(Théorème de Heine).*
Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est un compact.

Preuve. Soit $a < b$ deux réels et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. Notons
$A = \{x \in [a,b] \ / \ [a,x]$ est recouvert par une famille finie des $O_i\}$. A est non vide car $a \in A$. Si $b \in A$, alors $[a,b]$ est un compact. D'autre part A est majorée par b, donc A admet une borne supérieure, soit $\alpha = \sup A$. On a alors $\alpha \leqslant b$, donc il existe $i_0 \in I$ tel que $\alpha \in O_{i_0}$. De plus $A \cap O_{i_0}$ est non vide (car α est la borne supérieure de A). Soit x un élément de l'intersection, alors il existe J fini contenu dans I tel que $[a,x] \subset \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, donc $[a,\alpha] \subset (\bigcup\limits_{j\in J} A_j) \cup O_{i_0}$. Ce qui veut dire que $\alpha \in A$. D'autre part si $\alpha < b$, alors O_{i_0} va contenir un élément y plus grand strictement que α et plus petit strictement que b. Cela veut dire que $y \in A$ car $[a,y] \subset (\bigcup\limits_{j\in J} A_j) \cup O_{i_0}$ ce qui est absurde et donc $\alpha = b$.

Chapitre 3

SUITES NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous définissons la notion de suite numérique. Nous étudions les suites convergentes et la structure de l'ensemble de ces suites. En suite nous introduisons les notions de suites adjacentes, de suites récurentes et de suites de Cauchy et nous les caractérisons.
Des critères de convergence ont été utilisés pour étudier ces suites et calculer leurs limites lorsqu' elle sont convergentes.

3.1 Généralités

Définition 3.1.1.

- *On appelle suite numérique toute application* u *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On la note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Le nombre réel* $u_n = u(n)$ *est appelé terme général d'ordre* n *de la suite.*
- *On appelle suite extraite ou encore sous-suite d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *toute suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, *où* φ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. *son terme général est donné par* $v_n = u_{\varphi(n)}$.
- $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *est appelé ensemble des valeurs prises par la suite.*

Exercice 3.1.1. *Montrer que la suite de terme général* $v_n = \frac{\cos x}{4n+1}$ *est une suite extraite de la suite de terme général* $u_n = \frac{1}{n}\sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Preuve. l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 4n+1$ est strictement croissante. Et on a $u_{\varphi(n)} = \frac{\sin(x+(4n+1)\frac{\pi}{2})}{4n+1} = \frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{4n+1} = \frac{\cos(x)}{4n+1} = v_n$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.1.2.
• *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite majorée (resp. minorée) s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *(resp.* $m \in \mathbb{R}$*) tels que* $u_n \leqslant M$ *(resp.* $u_n \geqslant m$*)* $\forall n \in \mathbb{N}$.
• *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, ce qui est équivaut à dire* $\exists M \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N},$ *on a* $|u_n| \leqslant M$.
• *Une suite est dite croissante (resp. décroissante) si* $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $n \leqslant m$ *alors* $u_n \leqslant u_m$ *(resp.* $u_n \geqslant u_m$*), ou de manière équivalente* $u_{n+1} \geqslant u_n$ *(resp.* $u_{n+1} \leqslant u_n$*)* $\forall n \in \mathbb{N}$.
• *Une suite est dite monotone quand elle est soit croissante, soit décroissante.*

• Structure de l'ensemble des suites :
L'ensemble des suites numériques est muni des opérations suivantes

$$\begin{aligned} (u_n)_n + (v_n)_n &= (u_n + v_n)_n \\ \lambda(u_n)_n &= (\lambda u_n)_n \\ (u_n)_n(v_n)_n &= (u_n v_n)_n. \end{aligned}$$

Muni de ces trois opérations, l'ensemble des suites numériques est une algèbre unitaire et commutative sur $\mathbb{R}$ (i.e un espace-vectoriel sur $\mathbb{R}$ et un anneau commutatif et unitaire).

Définition 3.1.3. *On dit que* $a \in \mathbb{R}$ *est un point d'accumulation de la suite* $(u_n)_n$ *si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une infinité de termes de la suite tels que* $|u_n - a| < \varepsilon$.

Il faut remarquer que cette définition est la même que celle du point d'accumulation donnée dans le chapitre II. Par ailleurs si a est un terme de la suite, il est un point adhérent à la suite.

Remarques 3.1.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) a *est un point d'accumulation de la suite* $(u_n)_n$ *;*
(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ *tel que* $|u_n - a| < \varepsilon$ *;*
iii) $\forall \varepsilon > 0$*, l'ensemble* $\{n \in \mathbb{N} \;/\; |u_n - a| < \varepsilon\}$ *est infini.*

Exercice 3.1.2. *Notons* $A_0 = \{u_n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$, $A_n = \{u_k \;/\; k \geqslant n\}$ *et* A *l'ensemble des points d'accumulation de la suite* $(u_n)_n$*. Montrer que* $\overline{A_0} = A_0 \cup A$.

Preuve. Nous avons les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \textit{ tel que } u_n \in]x-\epsilon, x+\epsilon[\textit{ et } u_n \neq x \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N};\ ]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap A_N \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A_n},\ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}. \end{aligned}$$

Maintenant, Nous somme en mesure de montrer que $\overline{A_0} = A_0 \cup A$. Nous avons

$$A_0 \subset \overline{A_0} \textit{ et } A \subset \overline{A_0}$$

ce qui montre que

$$A_0 \cup A \subset \overline{A_0}.$$

D'autre part, si $x \in \overline{A_0}$ alors $x \in A_0$ ou bien x est un point d'accumulation de A_0. Ce qui montre que $x \in A_0 \cup A$, d'où l'égalité.

3.2 Suites convergentes

Définition 3.2.1.

- *On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ ou bien $u_n \to l$ quand $(n \to \infty)$.

- *On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$) si,*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } n > N \Rightarrow u_n > A \textit{ (resp. } u_n < -A\textit{)}.$$

Proposition 3.2.1. *La limite d'une suite convergente est unique.*

Preuve. Supposons que la suite $(u_n)_n$ tend vers deux limites l_1 et l_2. On aura alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \varepsilon/2$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \varepsilon/2.$$

Ainsi, pour $n > \max(N_1, N_2)$ on aura

$$|l_1 - l_2| \leqslant |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < \varepsilon.$$

Donc $\forall \varepsilon > 0,\ |l_1 - l_2| < \varepsilon$ d'où $l_1 = l_2$.

Remarques 3.2.1.
i) Une suite qui admet une limite infinie est dite divergente.
ii) On ne change pas la nature d'une suite (convergente ou divergente) ni sa limite, si on modifie ou si on supprime un nombre fini de termes de la suite.
iii) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, *alors toute suite extraite est convergente et converge vers la même limite* l.
iv) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, *alors* l *est l'unique point d'accumulation de la suite* $(u_n)_n$. *La réciproque est fausse, par exemple la suite*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/2, 2, 1/3, 3, ..., 1/n, n, ...)$$

admet un seul point d'accumulation 0, mais elle n'est pas convergente.

Proposition 3.2.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, alors pour $\varepsilon = 1$,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad \Rightarrow |u_n - l| < 1.$$

Donc pour $n > N$, on a

$$|u_n| < |l| + 1.$$

Posons $M = \sup(|u_0|, |u_1|, ..., |u_N|, |l| + 1)$, on a alors :

$$|u_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conséquenses :
i) Une suite non bornée est soit divergente, soit qu'elle n'admet pas de limite (il suffit de considérer : $u_n = (-1)^n n$ qui n'a pas de limite et qui n'est pas bornée).
ii) La réciproque de la Proposition 3.2.2 n'est pas vraie. En effet, une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Il suffit de considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \sin(n\pi)$ qui sont bornées mais non convergentes.

3.3 Opérations sur les suites convergentes

Proposition 3.3.1. *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ *et que* $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$. *Alors* *i)* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=l+l'$. *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda.u_n)=\lambda.l$. *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n.v_n)=l.l'$. *iv) Si* $l\neq 0$, *on a* $\lim\limits_{n\to\infty}(1/u_n)=1/l$.

Preuve. i) et ii) sont des conséquences faciles de la définition. Pour iii) il suffit de remarquer que $\left|u_n.v_n-l.l'\right|\leqslant\left|v_n-l'\right||l|+|u_n-l||v_n|$ et que (v_n) est bornée.
Pour iv) remarquons d'abord qu'on a pas supposé $u_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Cependant, nous allons vérifier que $(u_n)_n$ ne peut s'annuler que pour un nombre fini d'indices. En effet

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}: n>N_1\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon.$$

Puisque l est non nul, on peut prendre $\varepsilon=\frac{|l|}{2}$ et on a : $n>N_1$ implique $|u_n-l|<\frac{|l|}{2}$. Or

$$|u_n|=|u_n-l+l|\geqslant|l|-|u_n-l|\geqslant|l|-\frac{|l|}{2}>0.$$

D'où $u_n\neq 0$ pour $n>N_1$. D'autre part ;

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_2\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}: n>N_2\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon\frac{|l|^2}{2}.$$

On a juste rempalcé ϵ par $\epsilon\frac{|l|^2}{2}$, vu que ϵ est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$. Posons $N=\max(N_1,N_2)$, on a :

$$n>N\Rightarrow\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{l}\right|=\frac{|u_n-l|}{|u_n|\,|l|}<\frac{\varepsilon\frac{|l|^2}{2}}{\frac{|l|}{2}\ \ |l|}$$

ce qui entraîne que $\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{l}\right|<\varepsilon$. D'où l'on a

$$\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\ \ n>N\Rightarrow\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{l}\right|<\varepsilon.$$

Théorème 5. *(Théorème de Bolzano-Weierstrass.) Un nombre réel a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$ si, et seulement si, il existe une suite extraite $v_n=u_{\varphi(n)}$ de $(u_n)_n$ qui converge vers a.*

Preuve. Soit $(v_n)_n=(u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers a, i.e.

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},\ \ n>N\Rightarrow\left|u_{\varphi(n)}-a\right|<\varepsilon.$$

Puisque φ est strictement croissante, $\{n > N \ / \ |u_{\varphi(n)} - a| < \epsilon\}$ est infini, donc il y a une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$ qui vérifient $|u_n - a| < \varepsilon$, par conséquent a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$.
Réciproquement, soit a un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$, il existe alors une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - a| < 1$.
Soit p_1 un tel indice. Posons $\varphi(1) = p_1$. La construction de $\varphi(n)$ se fait par récurrence sur n de la manière suivante. Supposons que l'on a construit $\varphi(1) < \varphi(2) < ... < \varphi(n-1)$ tels que $\left|u_{\varphi(k)} - a\right| < \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Dans la définition de a valeur d'accumulation et pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il y a une infinité de termes de la suite tels que $|u_p - a| < \frac{1}{n}$. Soit p_n un tel indice qui vérifie en plus $p_n > \varphi(n-1)$ et en posant $\varphi(n) = p_n$, on a :

$$\left|u_{\varphi(n)} - a\right| < \frac{1}{n} \text{ et } \varphi(n-1) < \varphi(n).$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est donc une suite extraite de la suite $(u_n)_n$ et elle vérifie

$$\left|u_{\varphi(n)} - a\right| < \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour achever cette démonstration, on rappelle que $\mathbb{R}$ est archmédien, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \left|u_{\varphi(n)} - a\right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = a$.

Théorème 6. *(Théorème Bolzano-Weierstrass.) De toute suite bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée et notons $A_n = \{u_k \ / \ k \geqslant n\}$. Ces ensembles A_n sont bornés. Soit alors $a_n = \inf A_n$ et soit $a = \sup a_n$. Montrons que a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_n$. D'abord remarquons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, car

$$A_n = \{u_k \ / \ k \geqslant n\} \ \supset \ A_{n+1} = \{u_k \ / \ k \geqslant n+1\}$$

ce qui implique que

$$inf(A_n) \leq inf(A_{n+1}).$$

D'autre part si a n'est pas un point d'accumulation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$\exists \epsilon_0 > 0, \ tel \ que \ ]a - \epsilon_0, a + \epsilon_0[\cap A = \emptyset$$

où $A = \{u_k \ / \ k \in \mathbb{N}\} = A_0$.
Cela s'exprime par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq a + \epsilon_0 \ \textit{ou bien} \ u_n \leq a - \epsilon_0.$$

Notons $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \geq a + \epsilon_0\}$ et $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \leq a - \epsilon_0\}$. On remarque que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{N}$ et que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Nous avons trois cas possibles :
1^{er} cas : Si $\mathcal{A}$ est fini et $\mathcal{B}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit alors $p_0 = max(\mathcal{A})$. Donc

$$\forall n \geq p_0, \ u_n \leq a - \epsilon_0$$

ce qui implique que

$$\forall n \geq p_0, \ a_n \leq u_n \leq a - \epsilon_0$$

ceci donne

$$a = sup_{n \in \mathbb{N}}\{a_n\} \leq a - \epsilon_0$$

ce qui absurde.
2^{eme} cas : Si $\mathcal{B}$ est fini et $\mathcal{A}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit $q_0 = max(\mathcal{B})$. On a

$$\forall n \geq p_0, \ u_n \geq a + \epsilon_0,$$

donc

$$\forall n \geq p_0, \ a_n \geq a + \epsilon_0.$$

Il en résulte que

$$a = sup_{n \in \mathbb{N}}\{a_n\} \geq a + \epsilon_0$$

ce qui est absurde.
3^{eme} cas : Il existe deux applications bijectives stictement croissantes $\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{A} \\ \quad n \longrightarrow \varphi(n) \end{array}$ et $\begin{array}{l} \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{B} \\ \quad n \longrightarrow \psi(n) \end{array}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\varphi(n)} \geq a + \epsilon_0 \\ u_{\psi(n)} \leq a - \epsilon_0. \end{array} \right.$$

Ceci implique que la sous-suite extraite $(a_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ $(resp.\ (a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}})$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{\psi(n)} \geq a + \epsilon_0$ $(resp.\ a_{\varphi(n)} \leq a - \epsilon_0)$, donc $\lim_{n \to +\infty} a_{\psi(n)} \geq a + \epsilon_0$ $(resp.\ \lim_{n \to +\infty} a_{\varphi(n)} \leq a - \epsilon_0)$.
Or toute sous-suite extraite d'une suite convergente est aussi une suite convergente et elles convergent vers la même limite. C'est-à-dire que $\lim_{n \to +\infty} a_{\psi(n)} = a \geq a + \epsilon_0$ (resp. $\lim_{n \to +\infty} a_{\varphi(n)} = a \leq a - \epsilon_0$), ce qui est absurde. On en conclut que a est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc il existe une sous-suite extraite $(u_{\theta(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a.

3.4 Critères de convergence

Théorème 7. *Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente et converge vers sa borne supérieure (resp. sa borne inférieure).*

Preuve. Considérons une suite $(u_n)_n$ croissante et majorée, i.e.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1} \\ \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M. \end{cases}$$

Posons $A = \{u_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, $A \neq \emptyset$ et A est majoré, donc A admet une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Or

$$l = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant l \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } l - \varepsilon < u_N \leqslant l < l + \varepsilon. \end{cases}$$

Mais, comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \ l - \varepsilon < u_N < u_n \leqslant l < l + \varepsilon.$$

Ce qui montre que $l = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Remarque 3.4.1. *Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ et une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

Exercices 3.4.1.
i) Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

est convergente.
ii) Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ fixé, telle que } n > N \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leqslant k < 1.$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 0.

Solution : i/ On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n-1}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

qui est strictement positif à partir de $n = 2$. On en déduit que $(u_n)_n$ est croissante. D'autre part, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n+1}$ ce qui veut dire que la suite est majorée. Donc elle est convergente.
ii/ Si $k = 0$, alors la suite est constante à partir du rang N. Donc, elle est convergente.
Si $k \neq 0$ on a par hypothèse pour tout $n > N$

$$|u_{n+1}| \leqslant k\,|u_n| < |u_n|\,.$$

On en déduit que $|u_n| \leqslant k^{n-N}\,|u_N|\,.$ Or k^{n-N} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$. Ce qui veut dire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3.5 Suites adjacentes

Définition 3.5.1. *Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si les deux assertions suivantes sont vérifiées*
a) l'une des suites est croissante et l'autre est décroissante.
b) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 8. *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Preuve. Supposons que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante, et posons $w_n = v_n - u_n$. On a

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \leqslant 0.$$

La suite $(w_n)_n$ est donc décroissante. Comme elle tend vers 0, elle est positive (i.e. $w_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$). On en déduit que

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant v_0.$$

Ce qui montre que $(u_n)_n$, (resp. $(v_n)_n$) est croissante majorée par v_0 (resp. décroissante minorée par u_0), donc conergente. Dans ce cas, on sait que la somme des limites est égale à la limite de la somme, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Exemple 3.5.1. *Soit* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{2.3...n}$ *et* $v_n - u_n = \frac{1}{2.3...n}$. *Ces deux suites sont adjacentes.*

En effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2.3...n.(n+1)} \geqslant 0$, donc $(u_n)_n$ est croissante.
$v_n - v_{n+1} = \frac{n-1}{2.3...n.(n+1)} \geqslant 0$ (à partir de $n \geqslant 1$), donc $(v_n)_n$ est décroissante. Et on a $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2.3...n} = 0$.

3.6 Suites de Cauchy

Définition 3.6.1. *Une suite numérique* $(u_n)_n$ *est dite de Cauchy si, et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, n > N \text{ et } m > N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Théorème 9. *Une suite* $(u_n)_n$ *de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$). On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon/2.$$

Donc pour $n > N$ et $m > N$, on a $|u_m - u_n| \leqslant |u_m - l| + |u_n - l| < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.
Inversement, soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. On commence par montrer qu'elle est bornée. En effet

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, n > N \text{ et } m > N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 1$ et $m = N+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow |u_n - u_{N+1}| < 1$. Donc $n > N \Rightarrow |u_n| < |u_{N+1}| + 1$.
Posons $M = \sup(|u_0|, |u_1|, ..., |u_N|, |u_{N+1}| + 1)$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.
Notons $A_n = \{u_k \ / \ k \geqslant n\}$. La famille $(A_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion (i.e. $A_n \subset A_{n-1} \subset ... \subset A_0$). De plus tous les A_n sont non vides et bornés car, comme on vient de le voir ci-dessus la suite $(u_n)_n$ est bornée. Donc, chaque A_n admet une borne supérieure b_n et une borne inférieure a_n et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ c'est-à-dire que la suite $(a_n)_n$ (resp. $(b_n)_n$) est croissante (resp. décroissante). En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \geqslant n \text{ tel que } a_n \leqslant u_p < a_n + \varepsilon/3$$

et
$$\forall \varepsilon > 0, \exists q \geqslant n \text{ tel que } b_n - \varepsilon/3 < u_q \leqslant b_n.$$
Mais, nous savons que $(u_n)_n$ est de Cauchy, donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, p > N \text{ et } q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon/3.$$
De plus, on a $|b_n - a_n| \leqslant |b_n - u_p| + |u_p - u_q| + |u_q - a_n|$.
Et pour $n > N$, on a
$$p \geq n > N \Rightarrow 0 \leq u_p - a_n < \varepsilon/3$$
et
$$q \geq n > N \Rightarrow -\varepsilon/3 < u_q - b_n \leq 0.$$
On en déduit que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon.$$
D'où les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et convergent vers la même limite l. Enfin, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ alors la suite $(u_n)_n$ est convergente et sa limite est l.

3.7 Suites récurrentes

Définition 3.7.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une suite récurrente est définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 3.7.1. *Notons D_f le domaine de définition de f (i.e. $D_f = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \mathbb{R}\}$). Une suite récurrente u_n est définie s'il existe une partie $D \subset D_f$ telle que : $u_0 \in D$ et $f(D) \subset D$.*

Proposition 3.7.1. *Si f est croissante sur D alors la suite recurrente u_n est monotone et on a*

i) u_n est croissante si et seulement si $f(u_0) \geq u_0$;
ii) u_n est décroissante si et seulement si $f(u_0) \leq u_0$.

Preuve : Soit f une fonction croissante sur D.

i) $u_0 \leq u_1 = f(u_0)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. En effet, cette relation est vraie pour $n = 0$. Supposons qu' elle est vraie à l'ordre n, on a
$u_n \leq u_{n+1}$ implique $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ car f est croissante c. à. d. $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc u_n est croissante.

ii) Si $f(u_0) \leq u_0$, un raisonnement analogue au précédent montre que u_n est décroissante.

Proposition 3.7.2. *Si f est continue sur D (domaine ouvert) et si la suite récurrente u_n est convergente alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$ (on dit que x est un point fixe de f).*

Preuve : $lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$. DE même, f continue en $l \in D \Leftrightarrow \forall\alpha > 0, \ \exists q > 0; \ \forall x \in D, \ |x - l| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \alpha$. Prenons, $\begin{cases} 0 < \alpha < \epsilon \\ 0 < \alpha < \eta, \end{cases}$ alors

$$\begin{aligned} |f(l) - l| &= |f(l) - f(u_n) + f(u_n) - l| \\ &\leq |f(l) - f(u_n)| + |f(u_n) - l| \\ &\leq \alpha + \epsilon \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Comme ϵ est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$ alors $|f(l) - l| = 0$ donc $f(l) + l$.

Remarque 3.7.2. *Si f n'admet pas de point fixe alors u_n est divergente.*

Exercice 3.7.1. *Etudier la convergence des suites récurrentes suivantes*
1) $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 3 - \sqrt{\frac{u_n}{2}}$.
2) $u_0 = a \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Solution :

1) La fonction $f : x \longrightarrow 3 - \sqrt{\frac{x}{2}}$ est définie de $[0, +\infty[$ dans $] - \infty, 3]$ et elle est décroissante. L'ensemble $D = [0, 3]$, répond donc parfaitement à la condition $f(D) \subset D \subset D_f$.
i) On a $u_0 = 0 \in D$.
ii) si $(u_n)_n$ converge sa limite l est solution de l'équation $f(l) = l$ ce qui est équivalent à dire que l est solution de l'équation $x^2 - \frac{13}{2}x + 9 = 0$, ou encore que $l = 2$ ou bien $l = \frac{9}{2}$. Et comme $\frac{9}{2} \notin [0, 3]$ donc $l = 2$.

2) Le domaine de définition de la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x+2}$ est évidemment $D_f = [-2, +\infty[$. Et comme $u_0 \geq 0$, nous prenons l'ensemble $D = [0, +\infty[\subset D_f$. Nous avons $f(D) \subset D$. f est continue et strictement croissante sur D. D'autre part on a $f(u_0) - u_0 = \frac{(a+1)(2-a)}{\sqrt{a+2}+a}$. Le signe de $f(u_0) - u_0$ dépend de celui de $(2-a)$.
i) Si $a = 2$, on a $f(u_0) = u_0$ et donc la suite $(u_n)_n$ est stationaire et converge vers $u_0 = a$.
ii) Si $0 \leq a < 2$, on aura $f(u_0) \geq u_0$ et la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par 2. Donc $(u_n)_n$ est convergente et converge vers $f(l) = l$ avec $l \in D$. Ceci est équivalent à dire que $f(l) = l$. Ou encore $\sqrt{2+l} = l$, c'est-à-dire $l = 2$ ou $l = -1$. Et comme $l = -1 \notin D$ on a $l = 2$.
iii) si $a > 2$, un raisonnement analogue au précèdent montre que $(u_n)_n$ est une suite décroissante et minorée par 2 donc converge vers $l = 2$.

Chapitre 4

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous définissons la limite d'une fonction en un point, et nous étudions les différentes opérations usuelles sur ces limites. Nous définissons ensuite les fonctions continues et les fonctions dérivables en étudiant leurs structures. Nous donnons avec démonstration les théorèmes des valeurs intermédiaires, de Rolle^{Rl}, des accroissements finis, des accroissements finis généralisés, la formule de l'hopital et la formule de Taylor^{Ty}-Lagrange^{Lg}.
L'objectif visé est l'étude analytique des fonctions réelles à valeurs réelles.

4.1 Limite d'une fonction

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on note $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si f est une application d'une partie B de A dans $\mathbb{R}$, qui à chaque élément de B (appelé antécédent) fait correspondre au plus un réel (appelé son image par f). On signale que si $x_0 \in A$, alors f n'est peut être pas (ou bien n'est pas nécessairement) définie en x_0. C'est pourquoi on définit le domaine de définition de f noté D_f et pour lequel : $\forall x \in D_f; f(x) \in \mathbb{R}$ (i.e. admet un sens).

Rl. : mathécien Français 1652-1719 ; **Lg. :** mathécien Français 1736-1813

Ty. : mathécien Anglais 1685-1731.

Définitions 4.1.1.

- *On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \textit{tel que } x \in A \textit{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

on écrit dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

- *On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures si, et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \textit{tel que } x \in A \textit{ et } 0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

on écrit dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ *et l est appelé limite à droite de f en x_0.*

On définit de la même façon la limite par valeurs inférieures. Il faut signaler que dans la définition de la limite donnée ci-dessus, η dépend à la fois de ε et de x_0. Si par exemple on veut montrer en utilisant la définition que

$$\lim_{x \to 0} \ln(x + 1) = 0,$$

on écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists ?\eta > 0, \text{ tel que } |x - 0| < \eta \Rightarrow |\ln(x + 1) - 0| < \varepsilon.$$

Or

$$|\ln(x + 1) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon} - 1 < x < e^{\varepsilon} - 1.$$

Donc si on prend $0 < \eta < \min(|e^{-\varepsilon} - 1|, e^{\varepsilon} - 1)$, on obtient que
$|x - 0| < \eta \Rightarrow |\ln(x + 1) - 0| < \varepsilon$.

Exercices 4.1.1. *Montrer les assertions suivantes*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

ii) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *alors l est unique.*

Solution.

i/ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, tel que $x \in A$ et $0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$. Ce qui implique en particulier que

$$0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

et que
$$0 < x_0 - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \ .$$
Donc
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \ .$$
Réciproquement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_1 > 0, \text{ tel que } x \in A \text{ et } 0 < x - x_0 < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_2 > 0, \text{ tel que } x \in A \text{ et } 0 < x_0 - x < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

Si on pose $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$ alors

$$x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ce qui montre que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
ii/ Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, montrons l'unicité de l. Supposons le contraire, c'est-à-dire, supposons que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_1 > 0, \text{ tel que } x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_2 > 0, \text{ tel que } x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon \ .$$

Si on pose $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$ alors

$$x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

et
$$x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon \ .$$
Or pour ($x \in A$ et $0 < |x - x_0| < \eta$), on peut écrire

$$|l_1 - l_2| \leqslant |f(x) - l_2| + |f(x) - l_1| < 2\varepsilon \ .$$

On en déduit que $l_1 = l_2$ car ε est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exemples 4.1.1. *Calculer les limites suivantes*
$\lim_{x \to 0} x \sin x$ *et* $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x}$

Solution. On sait que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

donc $|x \sin x| \leqslant |x|$. Or $|x|$ tend vers 0 quand x tend vers 0 donc,

$$\lim_{x \to 0} (x \sin x) = 0.$$

Montrons en utilisant la définition que $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0.$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists ? M > 0, \text{ tel que } x > M \Rightarrow \left| \frac{x}{e^x} \right| < \varepsilon.$$

Si on sait que la fonction qui à x fait correspondre $\frac{x}{e^x}$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, il suffit de s'assurer qu'il existe $M \geqslant 1$ tel que : $\frac{M}{e^M} < \varepsilon$. Cette proposition est vraie car sinon

$$\exists \varepsilon > 0, \forall M > 1, \text{ on a : } M > \varepsilon e^M.$$

Ce qui entraîne en particulier que la suite de terme général $\frac{n}{e^n}$ est minorée par un ε strictement positif. Ce qui est absurde car la suite $(\frac{n}{e^n})_{n \geq 0}$ est convergente et sa limite est 0 (puisque elle est décroissante et minoré par 0).

4.2 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{A}$.

Proposition 4.2.1. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$, *alors*

i) $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'$;

ii) $\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l$;

iii) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = l\, l'$;

iv) si $l' \neq 0$, *alors* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.

Preuve. iii/ Pour tout x élément de A, on peut écrire

$$\begin{aligned} (fg)(x) - ll' &= f(x)g(x) - ll' \\ &= (f(x) - l)l' + (g(x) - l')f(x). \end{aligned}$$

On sait de plus que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, est équivaut à

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Donc l'ensemble $\{\ f(x)\ /\ x \in A$ et $0 < |x - x_0| < \eta\ \}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Il existe donc $M > 0$ tel que

$$x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow -M < f(x) < M.$$

De plus $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l^{'}$, est équivaut à

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta^{'} > 0,\ x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta^{'} \Rightarrow l' - \varepsilon < g(x) < l' + \varepsilon.$$

Posons $\nu = \min(\eta,\eta^{'})$, on a $x \in A$ et

$$0 < |x - x_0| < \nu \Rightarrow |(fg)(x) - ll'| \leqslant |f(x) - l|\,|l'| + |g(x) - l'|\,|f(x)|$$

ce qui entraîne que $|(fg)(x) - ll'| < \varepsilon\,|l'| + \varepsilon M$. En posant $\varepsilon^{'} = \varepsilon\,|l| + \varepsilon M$, alors

$$\exists\alpha > 0,\ x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(fg)(x) - ll'| < \varepsilon^{'}$$

ce qui exprime que $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x) = ll'$.

iv/ Nous allons nous contenter de montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l'}$. Mais avant, nous allons montrer, du fait que $l^{'} \neq 0$, qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $|g(x)| > 0,\ \ \forall x \in V$. En effet, puisque $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l^{'}$, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow l^{'} - \varepsilon < g(x) < l^{'} + \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = \frac{\left|l'\right|}{2}$, alors $\exists\eta_1 > 0,\ x \in A$ et

$$0 < |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{l^{'}}{2} < g(x) < \frac{3}{2}l^{'}, \text{ si } l^{'} > 0 \\ -\frac{3}{2}\left|l^{'}\right| < g(x) < -\frac{1}{2}\left|l^{'}\right| < 0, \text{ si } l^{'} < 0 \end{cases}.$$

Ce qui montre que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in\,]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[$ qui est un voisinage de x_0. Et donc pour $0 < \varepsilon^{'} < \frac{\left|l'\right|}{2}$, en posant $\nu = \min(\eta, \eta_1)$, on a

$$\begin{aligned} x \in A \text{ et } 0 < |x - x_0| < \nu \ \ &\Rightarrow\ \ \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}\right| = \left|\frac{l^{'} - g(x)}{g(x)l'}\right| \\ &\Rightarrow\ \ \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}\right| \leqslant 2\frac{\left|g(x) - l^{'}\right|}{|l'|^2} < \frac{2\varepsilon^{'}}{|l'|^2}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l'}$ car ε' est aussi petit que l'on veut et il est strictement positif (i.e. l'application $\epsilon \longrightarrow \frac{2\epsilon}{|l'|}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers lui même).

Proposition 4.2.2. *(composition.)*
Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ telles que $f(A) \subset B$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{y\to l} g(y) = l'$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} gof(x) = l'$.

Preuve. $\lim\limits_{y\to l} g(y) = l'$ est équivaut à

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ y \in B \text{ et } |y - l| < \eta \Rightarrow \left|g(y) - l'\right| < \varepsilon.$$

De plus pour ce η, $\exists\nu > 0$, $x \in A$ et $|x - x_0| < \nu \Rightarrow |f(x) - l| < \eta$. Comme $f(x) \in B$, en posant $y = f(x)$, on aura

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu > 0,\ x \in A \text{ et } |x - x_0| < \nu \Rightarrow \left|gof(x) - l'\right| < \varepsilon.$$

4.3 Fonctions équivalentes

Définition 4.3.1. *Deux fonctions f et g sont dites équivalentes quand x tend vers x_0 s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0, $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ où α un nombre réel positif assez petit, tel que*

$$\begin{cases} f(x) = g(x)h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1 \end{cases}$$

On écrit alors $f \sim g(x \to x_0)$ ou bien $f \underset{x_0}{\sim} g$.

Exemples 4.3.1. *On a, au voisinage de zéro les équivalences suivantes*

1) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$;

2) $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$;

3) $tg(x) \underset{0}{\sim} x$;

4) $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - x^2/2$;

5) $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\ x^i \underset{0}{\sim} a_0 + a_1 x$;

6) $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$.

Remarque 4.3.1. *Si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$, on n'a pas toujours*

$$f + g \underset{x_0}{\sim} f_1 + g_1$$

.

Contre exemple : $f(x) = x + x^2$ et $f_1(x) = x + x^3$, $g(x) = -x$ et $g_1(x) = -x$.
On a $f \underset{0}{\sim} f_1$ et $g \underset{0}{\sim} g_1$ mais x^2 n'est pas équivalente à x^3 au voisinage de 0, car

$$\frac{(f+g)(x)}{(f_1+g_1)(x)} = \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} \overset{-}{+}\infty.$$

Exercice 4.3.1. *Montrer que si* $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ *et* $g \underset{x_0}{\sim} g_1$*, alors* $fg \underset{x_0}{\sim} f_1 g_1$.

En effet : $\exists h$ (resp. k) définie sur un voisinage U (resp. W) de x_0 , avec

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = 1 \textit{ (resp. } \lim_{x\to x_0} k(x) = 1),$$

et telles que si $V = U \bigcap W$ (qui est bien un voisinage de x_0) alors :

$$\forall x \in V,\ f(x) = g(x)h(x)$$
$$\forall x \in V,\ f_1(x) = g_1(x)k(x).$$

Donc

$$\forall x \in V,\ f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x)H(x)$$

où

$$H(x) = h(x)k(x).$$

De plus, pour tout x dans V, on a

$$\lim_{x\to x_0} H(x) = \lim_{x\to x_0} (hk)(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) \lim_{x\to x_0} k(x) = 1.1 = 1.$$

Applications. Calculer en utilisant les fonctions équivalentes, les limites suivantes

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^x-1)tg^2(x)}{x(1-\cos x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{tg^2(x)}$
iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\log(x^{-1}(e^x-1))}{x}$.

Solution. On sait que $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$, que $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - x^2/2$ et que $tg(x) \underset{0}{\sim} x$, donc d'après l'exercice 4.3.1, $tg^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$. On en déduit que i/ $(e^x - 1)tg^2(x) \underset{0}{\sim} x^3$ et que $x(1 - \cos x) \underset{0}{\sim} x^3/2$. Par conséquent

$$\frac{(e^x-1)tg^2(x)}{x(1-\cos x)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}\frac{x^3}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

ii/

$$\frac{1-\cos x}{tg^2(x)} \underset{0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

iii/ On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et que $x^{-1}(e^x-1) \underset{0}{\sim} 1+\frac{x}{2}$. Donc

$$\ln(x^{-1}(e^x-1)) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Ce qui nous permet de déduire que

$$\frac{\log(x^{-1}(e^x-1))}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x/2}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

4.4 Fonctions continues

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.

Définitions 4.4.1.

- *On dit que f est continue en x_0, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui est équivaut à*

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ x \in I \ \textit{et}\ 0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- *On dit que f est continue à droite en x_0, si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, ce qui est équivaut à*

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ x \in I \ \textit{et}\ 0 < x - x_0 < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- *On dit que f est continue à gauche en x_0, si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, ce qui est équivaut à*

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ x \in I \ \textit{et}\ 0 < x_0 - x < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- *On dit que f est continue sur $\mathbb{R}$ si f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Proposition 4.4.1. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.*

f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de I, qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$. i.e.[f continue en a] $\Longleftrightarrow$ [$\forall (x_n)_{n\geqslant 0}$, tels que $x_n \in I$ et $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, alors $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$].

Preuve. Supposons par hypothèse que f est continue en a. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, x \in I \text{ et } 0 < |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$, une suite d'éléments de I qui converge vers a. Alors pour le nombre η défini ci-dessus,

$$\exists N \in \mathbb{N},\, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \eta$$

ce qui entraîne d'aprés la continuité de f en a que $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Réciproquement, nous allons utiliser la négation. Supposons que $\lim\limits_{y\to a} f(y) \neq f(a)$. Cela se traduit par,

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\, \forall \eta > 0,\, \exists y_\eta \in I \text{ vérifiant } 0 < |y_\eta - a| < \eta \text{ et } |f(y_\eta) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0.$$

En prenant $\eta = \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\exists y_n \in I$ vérifiant $0 < |y_n - a| < \eta$ et $|f(y_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0$. Ainsi, on aura construit une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de I qui converge vers a mais telle que la suite des images $(f(y_n))_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exercice 4.4.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes*
i) f est continue sur $\mathbb{R}$;
ii) $\forall O$ ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$;
iii) $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}, f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Preuve. i/$\Rightarrow$ii/ Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et soit $y \in O$. Il existe $\alpha > 0$, tel que $]y-\alpha, y+\alpha[\subset O$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Comme f est continue en x, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, 0 < \left|x - x'\right| < \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que

$$\forall \varepsilon,\; 0 < \varepsilon \leqslant \alpha,\;]x-\eta, x+\eta[\subset f^{-1}(]y-\varepsilon, y+\varepsilon[).$$

Autrement dit, $f^{-1}(O)$ est voisinage de chacun de ses points donc un ouvert de $\mathbb{R}$. Car, en choisissant

$$\epsilon = \alpha,\ x \in]x-\eta, x+\eta[\subset\ f^{-1}(]x-\alpha, x+\alpha[)\ \subset\ f^{-1}(O).$$

ii/$\Rightarrow$i/ Soit $x \in \mathbb{R}$, et notons $y = f(x)$. $\forall\, \varepsilon > 0$, $]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant y. Mais par hypothèse $f^{-1}(]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. De plus il contient x, donc il contient un ouvert contenant x. Il existe alors $\eta > 0$ tel que $]x-\eta, x+\eta[\subset f^{-1}(]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[)$. Autrement dit, on a

$$f(]x-\eta, x+\eta[) \subset]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$$

ce qui montre que f est continue en x quelconque dans $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
ii/$\Leftrightarrow$iii/ Il suffit de remarquer que $f^{-1}(\complement_{\mathbb{R}}^{F}) = \complement_{\mathbb{R}}^{f^{-1}(F)}$. En effet

$$\begin{array}{rcl} x \in \complement_{\mathbb{R}}^{f^{-1}(F)} & \Leftrightarrow & x \notin f^{-1}(F) \\ & \Leftrightarrow & f(x) \notin F \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in \complement_{\mathbb{R}}^{F} \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(\complement_{\mathbb{R}}^{F}). \end{array}$$

Ce qui justifie le résultat cherché.

4.5 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 4.5.1. *Soient f et g deux fonctions continues en x et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*
i) $f+g$, fg, λf, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues en x ;
ii) Si $f(x) \neq 0$, alors $\frac{g}{f}$ est continue en x ;
iii) Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en x et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que
$f(I) \subset J$ et g continue en $f(x)$, alors gof est continue en x.

Preuve. i) Montrons que $f+g$ est continue en x. Nous avons par hypothèse

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1 > 0,\ y \in I \text{ et } 0 < |y-x| < \eta_1 \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon/2$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_2 > 0,\ y \in I \text{ et } 0 < |y-x| < \eta_2 \Rightarrow |g(y)-g(x)| < \varepsilon/2.$$

Donc si on pose $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$, on aura

$$\forall \varepsilon > 0,\ y \in I \text{ et } 0 < |y - x| < \eta \Rightarrow |(f+g)(y) - (f+g)(x)| < \varepsilon$$

ce qui montre que la fonction $f + g$ est continue en x. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x. Comme f et g sont continues en x alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = f(x) \ \ et \ \ \lim_{n\longrightarrow+\infty} g(x_n) = g(x).$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n)g(x_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) \lim_{n\longrightarrow+\infty} g(x_n) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda f(x_n) = \lambda \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = \lambda f(x).$$

Donc, λf *et* fg sont aussi continues en x (d'aprés la proposition 4.4.1). Pour la fonction $\sup(f, g)$. Si, $f(x) > g(x)$, alors il existe un intervalle pointé en x de type $]x - \alpha\ ,\ x + \alpha[$ tel que

$$f(y) > g(y),\ \forall y \in\ ]x - \alpha\ ,\ x + \alpha[\,.$$

Donc $\sup(f, g)(y) = f(y)$, pour tout y, $y \in\ ]x - \alpha\ ,\ x + \alpha[$ $(\alpha > 0)$. Par conséquent, $\sup(f, g)$ est continue en x. Si $f(x) = g(x)$ et s'il existe $\alpha > 0$ telles que

$$\sup(f,g)(y) = \begin{cases} f(y)\ ,\ \forall y \in\ ]x-\alpha, x[\\ g(y)\ ,\ \forall y \in\ ]x, x+\alpha[\end{cases}$$

alors $\sup(f, g)$ est continue à droite (resp. à gauche) de x, et on a

$$\lim_{y\to x^+} \sup(f,g)(y) = g(x)$$

et

$$\lim_{y\to x^-} \sup(f,g)(y) = f(x),$$

car f et g sont continues en x. On en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x^+} \sup(f,g)(y) = \lim_{y\to x^-} \sup(f,g)(y) &= \lim_{y\to x} \sup(f,g)(y) \\ &= \sup(f,g)(x). \end{aligned}$$

On peut aussi voir cette continuité en remarquant que

$$\sup(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

qui n'est autre que la somme et la composée de fonctions continues en x, (ici on a composé avec la valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$). Nous allons maintenant montrer que $\frac{1}{f}$ est continue en x. En effet, si f est continue en x et $f(x) \neq 0$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\ |y-x| < \eta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon$$

pour $\varepsilon \leqslant \frac{|f(x)|}{2}$, il va exister $\eta_x > 0$ tel que

$$|y-x| < \eta_x \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon.$$

Autrement dit

$$|y-x| < \eta_x \Rightarrow \frac{|f(x)|}{2} < |f(y)| < \frac{3}{2}\,|f(x)|\,.$$

Ce qui montre au passage que f ne s'annule pas sur l'intervalle de centre x et de rayon η_x, $]x-\eta_x\ ,\ x+\eta_x[$. D'autre part, si on prend $\nu = \inf(\eta, \eta_x)$, alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| &\leqslant \frac{|f(y)-f(x)|}{|f(x)|\,|f(y)|} \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon}{|f(x)|^2}\end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{1}{f}$ est continue en x car ϵ st aussi petit que l'on veut et $|f(x)|$ est une constante. On en déduit que
$\lim_{n\to+\infty} \frac{g}{f}(x_n) = \frac{g}{f}(x)$,
ce qui montre que $\frac{g}{f}$ est continue en x, d'où ii).
Pour iii) comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et f est continue en x alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini. Si on considère de plus que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ alors comme $f(I) \subset J$ et que g est continue en $f(x) \in J$, alors la suite $g(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $g(f(x))$ quand n tend vers l'infini. Ce qui veut dire

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I \ \textit{tel que} \ \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

on a $\lim_{n\to+\infty} g\circ f(x_n) = g\circ f(x)$. Ce qui veut dire que $g\circ f$ est continue en x.

4.6 Propriétés des fonctions continues

Théorème 10. *L'image par une fonction continue d'un compact de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.*

Théorème 11. *Soit K un compact de $\mathbb{R}$, et soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème 12. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f(c) = 0$.*

Théorème 13. *L'image continue d'un connexe de $\mathbb{R}$ est un connexe de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Pour le théorème 10, si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors pour un compact K de $\mathbb{R}$ on va prendre $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(K)$. Nous savons que

$$K \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i).$$

Or f est continue donc pour tout $i \in I$, $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de K qui est un compact. On peut alors en extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, il existe J fini contenu dans I tels que $K \subset \bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j) = f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Oj)$. D'où $f(K) \subset (\bigcup_{j\in J} Oj)$.

Ainsi, on a montré que de tout recouvrement ouvert de $f(K)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Ce qui veut dire que $f(K)$ est un compact.

Si maintenant K est un compact de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur K, alors $f(K)$ est un compact donc $f(K)$ est borné. Comme $f(K)$ n'est pas vide, alors il existe m et M deux nombres réels tels que

$$m = \inf_{x\in K} f(x) \text{ et } M = \sup_{x\in K} f(x).$$

Mais d'une part, on sait que l'inf et le sup sont dans l'adhérence de $f(K)$ car ce sont deux points d'adhérence de $f(K)$. Autrement dit que $m \in \overline{f(K)}$ et $M \in \overline{f(K)}$. D'autre part on sait que $\overline{f(K)} = f(K)$ car $f(K)$ est fermé (étant un compact), ce qui achève la démonstration du théorème 11 car tout compact de $\mathbb{R}$ est à la fois fermé et borné. Pour

le théorème 12, supposons que $f(a) < 0$ et que $f(b) > 0$ et posons $E = \{ x \in [a,b] \ / \ f(x) \leqslant 0 \}$. E est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ car il contient a, de plus il est borné par a et b. On en déduit que E admet une borne supérieure et une borne inférieure. Soit $c = \sup E$, c appartient à $[a,b]$.
Montrons que $f(c) = 0$. Supposons que $f(c) < 0$, d'après la continuité de f à droite de c, on a

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\, c < x < c + \eta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon; \\
&\Leftrightarrow \\
&\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\, c < x < c + \eta \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Remarquons que pour $\varepsilon = -f(c) > 0$, si $x = c + \eta/2$ alors, on a $f(c + \eta/2) < 0$. Donc $c + \eta/2 \in E$ et c ne serait pas un majorant ce qui est absurde.
Supposons que $f(c) > 0$, d'après la continuité de f à gauche de c, on a

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ c - \eta < x < c \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon,\ x \in E \\
&\Leftrightarrow \\
&\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ c - \eta < x < c \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon,\ x \in E.
\end{aligned}$$

Si on prend $\varepsilon = f(c) > 0$, alors $\exists \eta > 0$, $c - \eta < x < c \Rightarrow 0 < f(x)$ (i).
D'autre part $c = \sup E \Rightarrow \exists \eta = \epsilon > 0$ et $\exists x_0 \in E$ (donc $f(x_0) \leqslant 0$) tel que $c - \epsilon < x_0 < c$ (ii).
Mais si on prend $\epsilon = \eta$, alors on aura à la fois $f(x_0) > 0$ (i) et $f(x_0) \leq 0$ (iii). On en conclut que $f(c) = 0$.
Pour le Théorème 13, on considère C un connexe de $\mathbb{R}$. Si $f(C) \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ tels que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouvert non vides de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ alors $C \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2)$. Mais f est continue donc $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}$ tels que

$$C \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2) \ \ et \ \ f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$$

ce qui est absurde, car C est connexe. Donc, $f(C)$ est connexe.

Théorème 14. *(Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I))*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et soit $\alpha < \beta$ deux éléments de $[a,b]$. Alors pour toute valeur λ comprise entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = \lambda$.

Preuve. On suppose que $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ comme suit

$$\forall x \in [a, b]\,,\ g(x) = f(x) - \lambda,$$

avec $f(\alpha) < \lambda < f(\beta)$ ou bien $f(\beta) < \lambda < f(\alpha)$. On constate que g est continue sur $[a, b]$ comme somme de deux fonctions continues sur $[a, b]$. Donc g est continue sur $[\alpha, \beta]$. De plus on a

$$g(\alpha)g(\beta) < 0.$$

On déduit (d'après le théorème 12) qu'il existe un élément $c \in\ ]\alpha, \beta[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire que $f(c) = \lambda$.

Exercice 4.6.1. *Montrer que le polynôme* $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ *admet une racine réelle dans l'intervalle* $]0, 1[$.

En effet, le polynôme est une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus $P(0) = -1 < 0$ et $P(1) = 2 > 0$. donc d'après le théorème 14, l'équation $P(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

4.7 Fonctions réciproques

Définition 4.7.1. *Soient* A *et* B *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$*, et* $f : A \to B$*. La fonction réciproque (notée* f^{-1}*) de* f*, quand elle existe, est définie comme suit*

$$f^{-1} : B \to A$$

$$\forall b \in B, f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b \text{ et } a \in A.$$

Théorème 15. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante), alors* f *est une bijection de* $[a, b]$ *sur* $[f(a), f(b)]$ *(resp.* $[f(b), f(a)]$ *et l'application* f^{-1} *définie sur* $[f(a), f(b)]$ *(resp. sur* $[f(b), f(a)]$ *) est continue et est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Preuve. Nous supposons que f est strictement croissante de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$. Commençons par montrer que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. En effet, $\forall x \in [a, b]$, on a : $a \leqslant x \leqslant b$, donc

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

ce qui veut dire que $f(x) \in [f(a), f(b)]$ donc $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$.
Pour l'autre inclusion, on va utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Soit $\lambda \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $\lambda = f(x)$ c'est-à-dire que $\lambda \in f([a,b])$. Il faut signaler que nous avons montré au passage que f est surjective de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Montrons maintenant que f est injective. Comme f est strictement croissante, alors :

$$a \leqslant x < y \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) < f(y) \leqslant f(b).$$

On en déduit que f est une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Montrons que $g = f^{-1}$ est une fonction continue de $[f(a), f(b)]$ vers $[a,b]$ et qu'elle est strictement croissante. Soit alors, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ appartenant tous les deux à $[f(a), f(b)]$ avec x_1 , x_2 appartenant à $[a,b]$. On a

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ce qui implique que $x_1 < x_2$ car f est strictement croissante. Donc, on a $g(y_1) < g(y_2)$ ce qui montre que g est strictement croissante. Montrons qu'elle est continue. Pour cela soit y_0 appartenant à $]f(a), f(b)[$ et soit x_0 appartenant à $]a,b[$ tel que $y_0 = f(x_0)$ ce qui est équivaut à dire que $x_0 = g(y_0)$. Soit $\varepsilon > 0$, telles que $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$ appartiennent à $]a,b[$, et posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. On a : $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$ ce qui entraîne que $y_1 < y_0 < y_2$. Posons $\eta = \inf(y_2 - y_0 \,,\, y_0 - y_1)$ qui est strictement positif. Pour tout y appartenant à $]f(a), f(b)[$, vérifiant $|y - y_0| < \eta$, on a

$$y_1 < y_0 - \eta < y < y_0 + \eta < y_2.$$

La fonction g étant strictement croissante, implique que

$$x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon$$

c'est-à-dire : $g(y_0) - \varepsilon < g(y) < g(y_0) + \varepsilon$. D'où

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ y \in [f(a), f(b)] \text{ avec } 0 < |y - y_0| < \eta \textit{ implique que}$$

$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. g est donc continue sur $]f(a), f(b)[$ car y_0 est quelconque. Pour achever cette démonstration, il faut montrer que g est continue à droite (resp. à gauche) de $f(a)$ (resp. de $f(b)$). En effet, il est facile de voir que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ y \in [f(a), f(b)] \text{ avec } 0 < y - f(a) < \eta \textit{ implique que}$$

$|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ ce qui montre que $\lim\limits_{y \to f(a)} g(y) = a$, ce qui montre que g est continue à droite de $f(a)$.

Remarques 4.7.1.
i) Il ne faut pas confondre f^{-1} *avec* $\frac{1}{f}$ *quand elles existent.*
ii) Quand f^{-1} *existe, on a*

$$\begin{aligned} fof^{-1} : B &\longrightarrow B \\ y &\longrightarrow y \end{aligned}$$

notée aussi id_B*, et on a*

$$\begin{aligned} f^{-1}of : A &\longrightarrow A \\ x &\longrightarrow x \end{aligned}$$

notée aussi id_A*, si* $A = B$ *on a* $id_A = id_B$ *notée simplement* I *et elle s'appelle l'application identique de* A*.*
iii) Si $M(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$ *alors* $N(f(x), x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$*. De plus le vecteur* $\overrightarrow{MN}$ *est perpendiculaire au vecteur* $\overrightarrow{u}(1,1)$ *qui est le vecteur directeur de la première bissectrice. En effet,*

$$< \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{u} >= (x - f(x)).1 + (f(x) - x).1 = 0 \; (FIG.4.1).$$

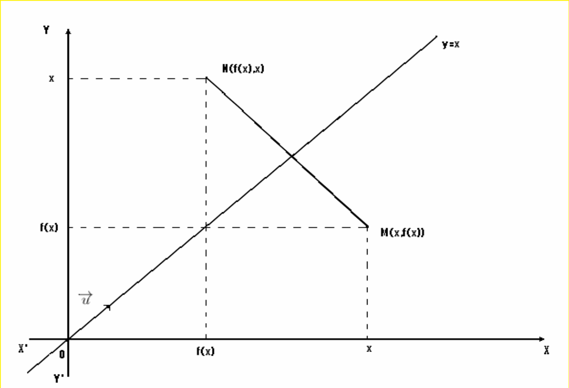

FIGURE 4.1 –

On conclut que dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f *et de* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice, car si* $(x, f(x))$ *appartient à la courbe de* f *alors* $(f(x), x)$ *appartient à la courbe de* f^{-1}*.*

Exemples 4.7.1.

1) La fonctiuon $f(x) = \sin x$

$$f : [-\pi/2,\ \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

est continue strictement croissante, donc sa fonction réciproque f^{-1} *no-*

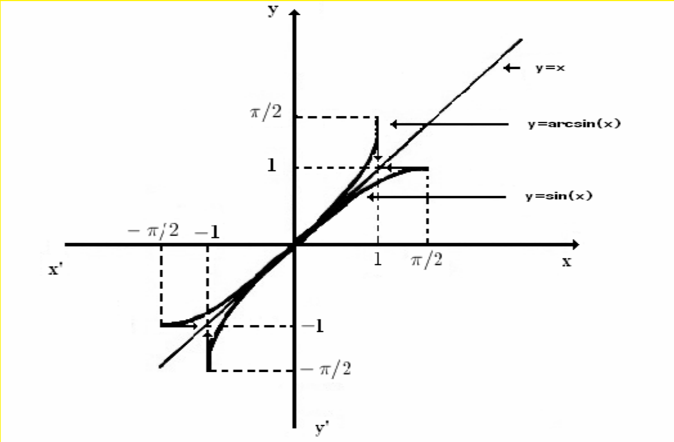

FIGURE 4.2 – sin et arcsin

tée arcsin*, définie par*

$$\left\{\begin{array}{c} \arcsin y = x \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \sin x \\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2 \end{array}\right.$$

est continue strictement croissante de $[-1, 1]$ *sur* $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$ *(FIG. 4.2).*
2) La fonction $f(x) = e^x$

$$f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$$

est continue strictement croissante, donc sa fonction réciproque notée $\ln(x)$ *définie par*

$$\left\{\begin{array}{c} \ln(y) = x \\ y \in]0, +\infty[\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

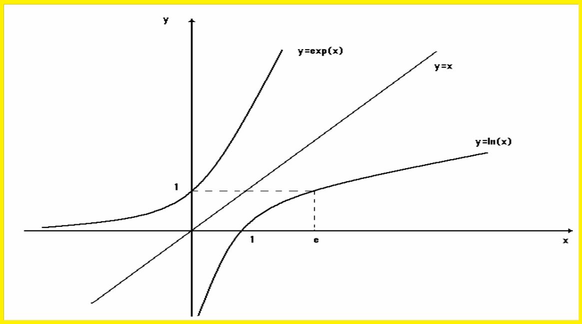

FIGURE 4.3 – les fonctions ln ; et exp

est continue strictement croissante de $]0,+\infty[$ *sur* $]-\infty,+\infty[$ *(FIG. 4.3).*
3) La fonction $f(x) = tg(x)$

$$f :]-\pi/2, +\pi/2[\longrightarrow]-\infty, +\infty[$$

est continue strictement croissante, donc sa fonction réciproque notée

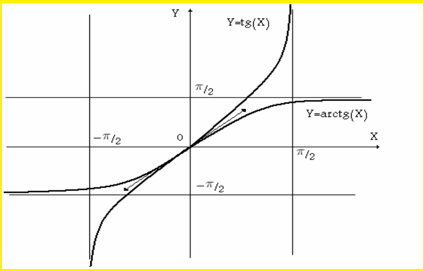

FIGURE 4.4 – Les fonctions tg et arctg.

arctan *définie par*

$$\left\{ \begin{array}{c} \arctan(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y = tg(x) \\ x \in]-\pi/2, +\pi/2[\end{array} \right.$$

est continue strictement croissante (FIG. 4.4).

4.8 Fonctions uniformément continues

Définition 4.8.1. *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite uniformément* *continue sur I si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ x \in I,\ x^{'} \in I \ \text{et}\ \left|x - x^{'}\right| < \eta \Rightarrow \left|f(x) - f(x^{'})\right| < \varepsilon.$$

Remarque 4.8.1. *i) Toute fonction uniformément continue sur I est continue sur I. La réciproque est fausse, il suffit de prendre $f(x) = x^2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$, telles que $\forall(x, x^{'}) \in \mathbb{R}^2$, $\left|x - x^{'}\right| < \eta \Rightarrow \left|x^2 - (x^{'})^2\right| < 1$. Alors pour $x = \frac{1}{\eta}$ et $x^{'} = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{\eta}$, on aura $\left|x - x^{'}\right| = \eta/2 < \eta$ mais $\left|x^2 - (x^{'})^2\right| = \frac{\eta^2}{4} + 1 > 1$, ce qui est absurde. Donc ce qu'on a supposé est faux, par conséquent la fonction $x \to x^2$ n'est pas uniformément continue.*
ii) La continuité est une notion ponctuelle c'est-à-dire point par point. Alors que la continuité uniforme est une notion globale c'est-à-dire sur l'ensemble tout entier.

Théorème 16. *Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est uniformément continue sur K.*

Preuve. f continue sur K veut dire que f continue en tout point de K. Soit $a \in K$, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta(a) > 0,\ \forall x \in K \text{ avec } |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2.$$

On a : $K \subset \bigcup_{a\in K} \left]a - \frac{\eta(a)}{2}\ ,\ a + \frac{\eta(a)}{2}\ \right[$. K étant compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe des points a_1, a_2,..., $a_n \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left]a_i - \frac{\eta(a_i)}{2}\ ,\ a_i + \frac{\eta(a_i)}{2}\ \right[$. Posons,

$$\eta = \frac{1}{2}\inf(\eta(a_1),\ \eta(a_2), ..., \eta(a_n)),$$

si $(x, x^{'}) \in K^2$ et $\left|x - x^{'}\right| < \eta$, on a $x \in K$, donc $\exists i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $x \in \left]a_i - \frac{\eta(a_i)}{2}\ ,\ a_i + \frac{\eta(a_i)}{2}\ \right[$. D'autre part
$\left|x^{'} - a_i\right| \leqslant \left|x^{'} - x\right| + |x - a_i| < \eta + \frac{\eta(a_i)}{2} \leqslant \eta(a_i)$,
d'où $x^{'} \in \left]a_i - \frac{\eta(a_i)}{2}\ ,\ a_i + \frac{\eta(a_i)}{2}\ \right[$ et donc on a

$$\left|f(x) - f(x^{'})\right| \leqslant |f(x) - f(a_i)| + \left|f(x^{'}) - f(a_i)\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Ce qui montre que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ (x,\ x^{'}) \in K^2 \text{ et } \left|x - x^{'}\right| < \eta \Rightarrow \left|f(x) - f(x^{'})\right| < \varepsilon$$

ce qui signifie que f est uniformément continue sur K.

4.9 Dérivée.

Motivation. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient $A(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ deux points du plan. La pente de la droite AM est donnée par

$$\tan(\beta) = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Quand x tend vers x_0 le point M tend vers le point A et la droite (AM) tend vers une position limite qui est la tangente en A à la courbe et on a $\tan(\alpha) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (FIG. 4.5).

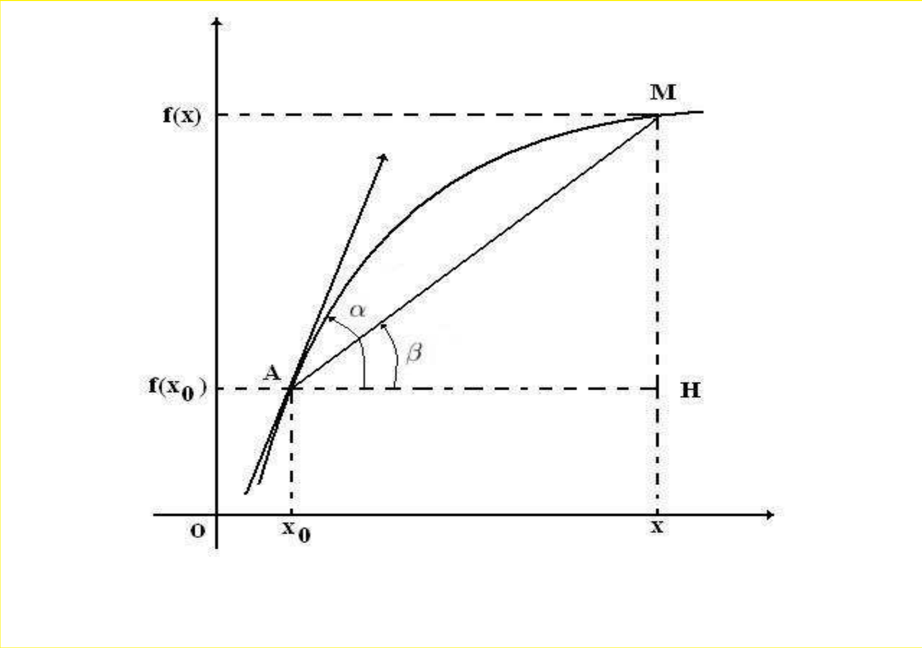

FIGURE 4.5 – représentation graphique de la dérivée

Définitions 4.9.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overset{o}{I}$.*

- *On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, et on note cette limite $f'(x_0)$.*

- *On dit que f est dérivable à droite en x_0 si* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe, et on note cette limite* $f_d'(x_0)$.
- *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe, et on note cette limite* $f_g'(x_0)$.

Exemples 4.9.1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to e^x \end{cases}$ *(resp.* $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^n \end{cases}$ *) est dérivable en* 0 *(resp. en* 1*).*

En effet, on sait que $e^x \underset{0}{\sim} 1+x$, donc $\frac{e^x-1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$ et que $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} n$, car chacun des n termes de cette somme tend vers 1. Ainsi on a montré que $f'(0)=1$ et que $g'(1)=n$.

Proposition 4.9.1.
1) f est dérivable en x_0 si, et seulement si, les dérivées à gauche et à droite de f en x_0 existent et sont égales.

$$f'(x_0) \text{ existe} \Leftrightarrow f_d'(x_0) = f_g'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

2) Si f est dérivable en x_0, alors $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.
3) Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse (voir le contre exemple de la valeur absolue qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0).

Preuve. 1/ Considérons g la fonction définie sur $I\setminus\{x_0\}$ comme suit

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ \forall x \in I\setminus\{x_0\}.$$

$f'(x_0)$ existe est équivaut à dire que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ existe si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} g(x) = l$. Ce qui exprime que f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que $f_d'(x_0) = f_g'(x_0) = l$.
2/ Comme f est dérivable en x_0 on a

$$\forall \eta > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in\,]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\cap I,\ \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < \eta.$$

En particulier si on pose $x = x_0 + h$ avec $|h| < \alpha$, on aura

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \eta.$$

Notons alors $\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$. Il est claire que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
De plus, on a $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$.
3/ D'après le 2/ de cette proposition, on peut écrire au voisinage de x_0

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0).$$

La limite du membre de droite quand x tend vers x_0, est égale à 0 car

$$f'(x_0) \in \mathbb{R} \text{ et } (x - x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

implique que

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)f'(x_0) = 0.$$

Ainsi, on a montré que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ce qui est suffisant pour dire que f est continue en x_0. Il faut signaler que la réciproque de cette propriété est fausse. Pour cela il suffit de prendre la fonction f, valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en 0.

$$f'_d(0) = 1 \text{ et } f'_g(0) = -1$$

Définitions 4.9.2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overset{o}{I}$.*

- *Si f est dérivable en x_0, alors la fonction f' définie par*

$$\begin{array}{ccc} \overset{o}{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

  est appelée fonction dérivée de f. On peut définir par récurrence sur n, les dérivées successives de f par

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \text{ avec } f^{(0)} = f.$$

- *L'ensemble des fonctions qui admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n, tel que $f^{(n)}$ soit continue sur I est noté $C^n(I)$. Cet ensemble muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire (i.e. $(C^n(I), +, .)$) est un espace-vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

- *Pour $n = 1$, les fonctions de $C^1(I)$ sont dites continûment dérivables.*

Remarque 4.9.1. *Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0, il faut d'abord que f soit définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.*

Proposition 4.9.2. *Structure des fonctions dérivables.*
1) Si f et g sont dérivables en $x_0 \in \overset{o}{I}$, alors $f+g$ et fg sont dérivables en x_0, et on a

$$(f+g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0)$$

et

$$(fg)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{'}(x_0).$$

2) Si f est dérivable en x_0 et $f^{'}(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et on a

$$(\frac{1}{f})^{'}(x_0) = -\frac{f^{'}(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

3) Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors gof est dérivable en x_0 et on a

$$(gof)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0).$$

4) Si f est dérivable en x_0, f strictement monotone et $f^{'}(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})^{'}(f(x_0)) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}.$$

Preuve. 1/ Pour le produit on a

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h) \\ &+ \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}f(x_0)\end{aligned}$$

quand on fait tendre h vers 0, le membre de droite sera égale à

$$f^{'}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{'}(x_0),$$

et le membre de gauche n'est autre que $(fg)^{'}(x_0)$.
Pour $2/$, on sait d'après la continuité de f en x_0, qu'il existe un intervalle I ouvert contenant x_0, tel que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Donc pour $x \in I$, on a

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)}$$

et au passage à la limite $(x \to x_0)$, on obtient ce qu'il faut.
3/ On Note

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

et

$$\psi(k) = \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k}.$$

On a

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = f^{'}(x_0) \text{ et } \lim_{k \to 0} \psi(k) = g^{'}(y_0)$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} gof(x_0 + h) &= g(f(x_0 + h)) \\ &= g(f(x_0) + h\varphi(h)). \end{aligned}$$

Posons $y_0 = f(x_0)$ et $k = h\varphi(h)$, alors

$$gof(x_0 + h) = g(f(x_0)) + h\varphi(h)\psi(h\varphi(h)) = g(y_0) + k\psi(k).$$

On en déduit que

$$\frac{gof(x_0 + h) - gof(x_0)}{h} = \psi(h\varphi(h))\varphi(h).$$

Quand on fait tendre h vers 0, on a $h\varphi(h)$ tend vers 0, donc le membre de droite tend vers $g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0)$. Alors que le membre de gauche n'est autre que $(gof)^{'}(x_0)$.
4/ Posons $g = f^{-1}$, $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$.

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Or

$$\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f^{'}(x_0)}.$$

Exercices 4.9.1. *Montrer les formules suivantes*
1) i) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *; ii)* $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *; iii)* $arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2) ***Formule de Leïbniz***

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

où $\complement_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *est toujours un entier naturel. Pour retrouver la valeur de* $\complement_n^k$*, on peut lire dans le triangle de Pascal quand* n *(resp.* k*) désigne la ligne (resp. la colonne) tout en respectant la formule* $\complement_n^k + \complement_n^{k+1} = \complement_{n+1}^{k+1}$

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

....

....

Preuve. 1/ Sur l'intervalle $[-1, 1]$, la fonction arcsin est la réciproque de la fonction sin sur l'intervalle $[-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$. Donc d'après la formule de la Proposition 4.9.2 4/, si $x = \sin(y)$ on a

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(y)} \\
&= \frac{1}{\cos(y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},
\end{aligned}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$. Sur l'intervalle $[-1, 1]$ $arccos(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $cos(y)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$. Donc, si $x = cos(y)$

on a

$$\begin{aligned} arccos'(x) &= \frac{1}{cos'(y)} = -\frac{1}{sin(y)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2(y)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

pour tout $x \in]-1,1[$.
Sur $\mathbb{R}$, $arctg(x)$ est la fonction réciproque de la fonction $tg(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc, si x=tg(y)

$$\begin{aligned} arctg'(x) &= \frac{1}{tg'(y)} = \frac{1}{1+tg^2(y)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2/ On va montrer la formule par récurrence sur n. C'est vrai pour $n=1$ car

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Supposons que la formule est vraie jusqu'à l'ordre $n-1$ et montrons qu'elle est encore vraie pour n. On sait que

$$(fg)^{(n)} = ((fg)^{(n-1)})'.$$

Or par hypothèse de récurrence

$$(fg)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(n-1-k)} g^{(k)}.$$

Donc en utilisant la formule de la dérivée de la somme, on obtient

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (f^{(n-1-k)} g^{(k)})'.$$

Puis en utilisant la formule de la dérivée du produit, on obtient

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k [(f^{(n-1-k)})' g^{(k)} + f^{(n-1-k)} (g^{(k)})'] \\ (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k [f^{(n-k)} g^{(k)} + f^{(n-1-k)} g^{(k+1)}]. \end{aligned}$$

Donc si on pose $h = k + 1$, la formule devient

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} f^{(n-k)} g^{(k)} + \sum_{h=1}^{n} C_{n-1}^{h-1} f^{(n-h)} g^{(h)}.$$

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= f^{(n)}g + [C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{0}] f^{(n-1)} g' + ... \\ &+ [C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}] f^{(n-k)} g^{(k)} + ... + fg^{(n)}.\end{aligned}$$

Mais il est facile de vérifier que

$$C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = C_{n}^{k}.$$

D'où

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

4.10 Théorème de Rolle et applications

Définitions 4.10.1. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{o}{I}$.*

- *On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en x_0 si*

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\,,\ f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

- *On dit que f admet un extrêmum local en x_0 si elle admet un maximum local en x_0 ou bien si f admet un minimum local en x_0.*

Proposition 4.10.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in \overset{o}{I}$. Si f admet un extrêmum local en x_0, alors*

$$f'(x_0) = 0$$

Preuve. Supposons que f admet un maximum local en x_0. Alors

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que } x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

D'autre part, comme f est dérivable en x_0, alors

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

Or
$$f_d^{'}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \text{ car } f(x) \leq f(x_0)$$
et
$$f_g^{'}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \text{ car } x - x_0 < 0.$$
On en déduit que $f^{'}(x_0) = 0$, car $f^{'}(x_0) = f_g^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0)$.

Théorème 17. *(Enoncé du théorème de Rolle)*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant*
i) f *continue sur* $[a,b]$;
ii) f *dérivable sur* $]a,b[$;
iii) $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in \,]a,b[$ *telle que* $f^{'}(c) = 0$.

Preuve. Si f est constante sur $[a,b]$, alors $f^{'}(x) = 0$ pour tout $x \in \,]a,b[$. Sinon, et comme f est continue sur $[a,b]$, alors f est uniformèment continue sur $[a,b]$, bornée et atteint ses bornes. Soit
$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \text{ et } m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x),$$
alors on a soit $M > f(a)$ ou bien $m < f(a)$. Supposons qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que
$$f(c) = M > f(a).$$
Nous avons un maximum local en c. Donc d'après la proposition 4.10.1 $f^{'}(c) = 0$.
Ce théorème s'interprète géométriquement en disant que la courbe de f admet une tangente horizontale au moins en un point $c \in \,]a,b[$ (FIG. 4.6).

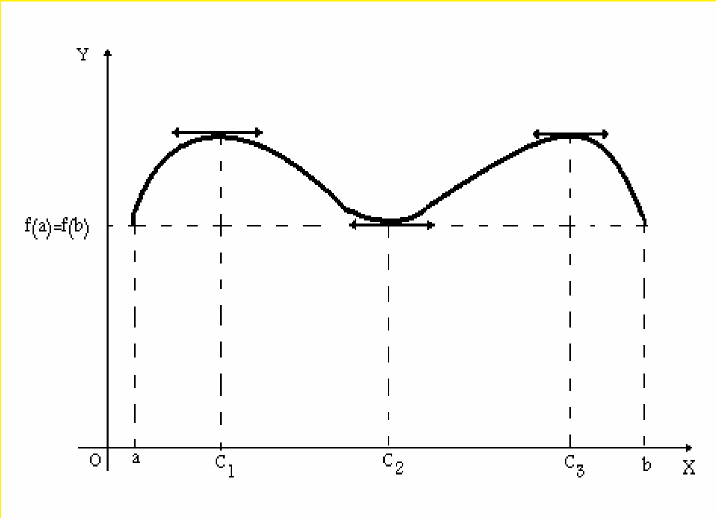

FIGURE 4.6 – Interprétation géométrique.

4.10.1 Théorème des accroissements finis.

A) **1^{re} application :**

Théorème 18. *Théorème des accroissements finis (T.A.F)*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $a \neq b$. Alors il existe c appartenant à $]a,b[$ telle que : $f(b) - f(a) = (b-a)f^{'}(c)$. i.e.

$$\exists c \in \,]a,b[\, ; \; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{'}(c).$$

Preuve. Posons

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} x \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que g est une fonction bien définie sur $[a,b]$ et qu'elle vérifie : g est continue sur $[a,b]$, g est dérivable sur $]a,b[$ et $g(a) = g(b)$. D'après le théorème de Rolle appliqué à g sur l'intervalle $[a,b]$, il existe $c \in \,]a,b[$ telle que $g^{'}(c) = 0$. Ce qui est équivaut à dire que

$$\exists c \in \,]a,b[\, , \text{ tel que } f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Autre formulation : Pour tout (x_1, x_2) appartenant à $[a, b]^2$ avec $x_1 < x_2$, on a f est continue sur $[x_1, x_2]$ et f dérivable sur $]x_1, x_2[$ car d'une part $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, d'autre part f est continue (resp. dérivable) sur $[a, b]$ (resp. sur $]a, b[$). Donc d'après le T.A.F appliqué à f sur $[x_1, x_2]$, il existe c appartenant à $]x_1, x_2[$ telle que $(x_2 - x_1)f'(c) = f(x_2) - f(x_1)$.

Interprétation géométrique :

Le théorème des accroissements finis veut dire que si f est continue sur $[a, b]$, et est dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in\ ]a, b[$ telle que la tangente à la courbe de f en c soit parallèle à la doite joignant les points A et B qui sont respectivement de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (FIG. 4.7).

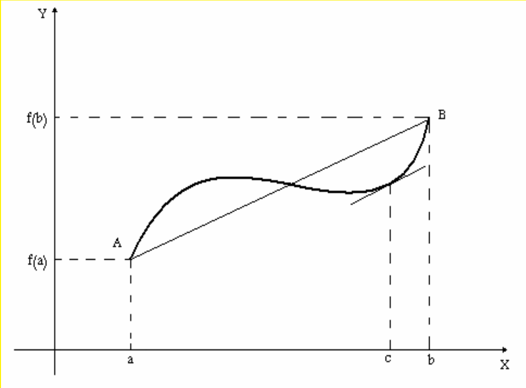

FIGURE 4.7 – représentation graphique du T. A. F.

Exercices 4.10.1. *Montrer que*

1) f constante sur $[a, b] \iff f'(x) = 0\ \forall x \in\ ]a, b[$.

2) f dérivable et strictement croissante sur $[a, b] \iff f'(x) > 0$, $\forall x \in\ ]a, b[$.

3) f dérivable et strictement décroissante sur $[a, b] \iff f'(x) < 0$, $\forall x \in\ ]a, b[$.

Preuve. Pour 1/ l'implication diréete est facile car la dérivée d'une fonction constante est nulle. Pour la réciproque, soit x appartenant à $]a, b[$. f est continue sur $[a, x]$, et dérivable sur $]a, x[$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[a, x]$, montre qu'il existe $c \in\ ]a, x[$ telle que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0.$$

Ce qui implique que
$$f(x) = f(a)$$
donc f est constante. Il faut signaler que cette réciproque est fausse si l'ensemble de départ de f n'est pas connexe (ici ça veut dire que cet ensemble de départ n'est pas un intervalle). On peut prendre comme contre exemple
$$f : [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
définie de la façon suivante. f est constante sur $[0,1]$ et vaut -1, puis f est constante sur $[2,3]$ et vaut 1. Il est facile de voir que $f^{'}(x) = 0$ $\forall x \in \,]0,1[\, \cup \,]2,3[$, mais f n'est pas constante sur $[0,1] \cup [2,3]$.
2/ Soit $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$ avec $x_1 < x_2$. Le T.A.F appliqué à f sur $[x_1, x_2]$ montre qu'il existe $c \in \,]x_1, x_2[$ telle que
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f^{'}(c).$$
Pour l'implication directe $\Rightarrow$), on sait que f est dérivable en c pour tout c appartenant à $]a,b[$ donc
$$f^{'}(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$
car f est strictement croissante sur $[c,x]$. Donc pour tout c appartenant à $]a,b[$, on a $f^{'}(c) > 0$. Pour la réciproque $\Leftarrow$), si $x_1 < x_2$, et $]x_1, x_2[\, \subset \,]a,b[$, et comme
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f^{'}(c) \text{ avec } c \in \,]x_1, x_2[$$
alors
$$f(x_2) > f(x_1)$$
car par hypothèse $f^{'}(c) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante.
3/ même démonstration qu'en 2/.

B) 2^{me} application :

Théorème 19. *(Théorème des accroissements finis généralisé)*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si de plus $g^{'}$ ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors
$$\exists c \in \,]a,b[\ \textit{ telle que } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}.$$

Preuve. On commence par remarquer que $g(b) \neq g(a)$ car sinon d'après le théorème de Rolle appliqué à g sur $[a, b]$, il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $g^{'}(c) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Soit F la fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x), \textit{ pour tout } x \in [a, b].$$

La fonction F est à la fois continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus

$$F(a) = F(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Le théorème de Rolle appliqué à F sur $[a, b]$, montre qu'il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que

$$F^{'}(c) = 0 \Longleftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}.$$

4.10.2 Règle de l'hopital

Théorème 20. *Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur un voisinage I centré en x_0, sauf peut être en x_0. Supposons que $g^{'}(x) \neq 0$ pour $x \neq x_0$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ se présente sous forme indéterminée ($\frac{0}{0}$, ou bien $\frac{\infty}{\infty}$). Alors si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l$, on a aussi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.*

Preuve. Supposons d'abord que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. On peut dans ce cas pronlonger par continuité f et g en x_0 et ce en posant : $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Comme f et g sont continues sur $[x_0, x]$ et dérivables sur $]x_0, x[$, alors d'après le théorème 18, il existe c appartenant à $]x_0, x[$ telle que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

ce qui implique que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}.$$

Du fait que c tend vers x_0 quand x tend vers x_0, on déduit que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)} = l.$$

Supposons maintenant que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
Soient $a < x_0 < x < x_1 < b$ des nombres réels appartenant à I. D'après le théorème 18 il existe ξ appartenant à $]x, x_1[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

D'autre part l'hypothèse $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \text{ tel que } |x - x_0| < \eta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon.$$

Choisissons x_1 de telle sorte que $x_1 < x_0 + \eta$ alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = l.$$

Or

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}} \right)$$

donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}.$$

Quand on fixe x_1 et on fait tendre x vers x_0, on obtient

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} = 1$$

car

$$|\lim_{x\to x_0} g(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)| = +\infty,$$

et $f(x_1)$ et $g(x_1)$ sont des nombres réels fixés, ce qui entaîne que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercices 4.10.2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{e^{1/x}}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{tg(x)}$.

Solution. Pour la première limite, on pose $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = e^{1/x}$, $I = \mathbb{R}^*$ et $x_0 = 0$. On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

De plus f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, donc d'après la régle de l'hopital, on a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{e^{1/x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

Pour la deuxième limite, on utilise deux fois la régle de l'hopital et on trouve

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

La troisième limite est une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$. En appliquant la régle de l'hopital, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{tg(x)} = \lim_{x \to 0} \cos^3(x) = 1.$$

4.11 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 21. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ en tout point de $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Preuve. Posons $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in [a, b]$ par

$$\psi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \alpha \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

où α est un nombre réel quelconque. ψ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\psi(b) = 0$.
Choisissons α de telle sorte que $\psi(a) = 0$. Autrement dit

$$\alpha = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} [f(b) - f(a) - \Sigma_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)]$$

Le théorème de Rolle appliqué à ψ sur $[a, b]$, montre qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\psi^{'}(c) = 0$. Or pour tout $t \in]a, b[$

$$\psi^{'}(t) = -f^{'}(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \alpha \frac{(b-t)^n}{n!}.$$

En c, on a $\psi^{'}(c) = 0$, ce qui est équivaut à

$$0 = -f^{'}(c) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-c)^k}{k!} f^{(k+1)}(c) + \alpha \frac{(b-c)^n}{n!}$$

en conséquence et après implification, on obtient :

$$\alpha = f^{(n+1)}(c).$$

D'où la formule désirée en écrivant $\psi(a) = 0$.

Applications

1. Considérons $P(X) = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i X^i$ la fonction associée au polynôme, $P(T) = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i T^i$ de degré n à coefficients α_i réels. Il est claire que P est une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$ donc sur n'importe quel intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. D'aprés le théorème précèdent il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que

$$P(X) = P(a) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(X-a)^k}{k!} P^k(a) + \frac{(X-a)^{k+1}}{(k+1)!} P^{n+1}(c).$$

   Mais $P^{n+1}(t) = 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$, donc

$$P(X) = P(a) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(X-a)^k}{k!} P^k(a).$$

2. Si en particulier $a = 0$, alors $P^k(0) = \alpha_k k!$ ce qui entraine que

$$P(X) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k X^k.$$

3. Prenons $P(X) = X^5 - X^3 + 10X - 1$. On a d'aprés ce qui précède,

$$P(X) = \sum_{k=}^{5} \frac{(X-1)^k}{k!} P^{(k)}(1)$$

or,
$P^{'}(t) = 5t^4 - 3t^2 + 10;\ P^{''}(t) = 20t^3 - 6t;\ P^{(3)}(t) = 60t^2 - 6;\ P^{(4)}(t) = 120t$ *et* $P^{(5)}(t) = 120$ ce qui implique que
$P(1) = 13;\ P^{'}(1) = 12;\ P^{''}(1) = 14;\ P^{(3)}(1) = 54;\ P^{(4)}(1) = 120$
$P^{(5)}(1) = 120$. On en déduit que

$$P(X) = 13+12(X-1)+7(X-1)^2+9(X-1)^3+5(X-1)^4+(X-1)^5.$$

Chapitre 5

DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

5.1 Généralités

Si f est de classe C^n sur un intervalle I et $f^{(n+1)}$ existe sur $\overset{o}{I}$, nous savons à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange qu'on peut approcher $f(x)$ $(x \in \overset{o}{I})$ par un polynôme de degré n au voisinage de x. Il faut remarquer que dans la démonstration on a utilisé les hypothèses du théorème de Rolle. Toutefois ces conditions ne sont pas nécessaires.

Par-exemple : Soit f definie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ en } 0 \end{cases}$$

f est approchée au voisinage de 0 par $1 + x + x^2$ car $x^3 \sin \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, mais f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. En effet

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, \\ f^{''}(x) &= 2 + 6x \sin \frac{1}{x} - 3 \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

qui n'admet pas de limite au voisinage de 0. Ceci nous motive à introduire la définition suivante :

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 (sauf peut être en 0). On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n non identiquement nul tel que*

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

$P(x)$ est appelé partie régulière et $x^n\varepsilon(x)$ est appelée partie négligeable ou bien terme complémentaire.

Remarque 5.1.1. *La fonction f définie dans l'exemple précédent admet un développement limité d'ordre un (resp. un développement limité d'ordre deux) au voisinage de 0. En effet*

$$f(x) = 1 + x + x(x^2 sin(\frac{1}{x}))$$

avec $\varepsilon(x) = x^2 sin(\frac{1}{x})$ est un terme qui tend vers 0 quand x tend vers 0 (resp. $f(x) = 1 + x + x^2 + x^2(x sin(\frac{1}{x}))$ avec $\varepsilon(x) = x sin(\frac{1}{x}) \to 0$ quand $x \to 0$).

Exemple 5.1.1. *Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On a*

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 + \frac{x^{n+1}}{1-x}\\ &= P(x) + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

avec $P(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ et $\varepsilon(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Propriétés 5.1.1.

i) Si f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de 0, alors elle admet un (D.L) à tout ordre $q \leqslant n$.

ii) Si f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de 0, il est unique.

iii) Si f est une fonction paire (resp. impaire) qui admet un (D.L) d'ordre n au voisinage de 0, alors sa partie régulière est paire (resp. impaire).

Preuve.

i/ Posons $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Alors on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... a_q x^q + x^q(a_{q+1}x + ... + a_n x^{n-q}) + x^n\varepsilon(x).$$

On pose
$$\varepsilon^{'}(x) = (a_{q+1}x + ... + a_n x^{n-q}) + x^{n-q}\varepsilon(x)$$
il est clair que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon^{'}(x) = 0$. Donc f admet un développement limité d'ordre q au voisinage de 0.
ii/ Si on a à la fois
$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$$
et
$$f(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n + x^n\alpha(x)$$
avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 0$. Alors
$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n + x^n(\varepsilon(x) - \alpha(x)).$$
Remplaçons dans l'équation ci dessus x par 0, on obtient $a_0 = b_0$. Ainsi, l'équation précédente devient
$$0 = (a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n + x^n(\varepsilon(x) - \alpha(x)).$$
En simplifiant par x on obtient
$$0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x... + (a_n - b_{n-1})x^n + x^{n-1}(\varepsilon(x) - \alpha(x)).$$
Donnons à x la valeur 0, on obtient $a_1 = b_1$. Ainsi de suite on montre que $a_k = b_k$ pour tout k, $k = 0, 1, ..., n$. Puis finalement, on montre que $\varepsilon(x) = \alpha(x)$.
iii/ Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Si f est paire [i.e. $f(-x) = f(x)$] alors
$$a_0 - a_1 x + ... + (-1)^k a_{2k+1}x^{2k+1} + .. + (-1)^n a_n x^n + (-1)^n x^n\varepsilon(-x)$$
$$= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

D'après l'unicité du développement limité, on aura pour tout k tel que $2k + 1 \leqslant n$
$$a_1 = a_3 = ... = a_{2k+1} = 0.$$
Donc
$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + ... + a_{2k}x^{2k} + ... + x^n\varepsilon(x).$$

Remarque 5.1.2. *Si $f \in C^n(I)$ et $f^{(n+1)}$ existe en $0 \in \overset{o}{I}$, alors f admet un (D.L) à l'ordre n au voisinage de 0 qui n'est autre que la formule de Taylor-Lagrange. C'est-à-dire pour tout $x \in I,\ x \neq 0$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + f^{(n+1)}(c) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $c \in]0, x[$ ou bien $c \in]x, 0[$ suivant que $x > 0$ ou bien que $x < 0$.

Ainsi,

$$f(x) = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) + x^n \varepsilon(x)$$

où (pour $0 \leq k \leq n$), $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ et $\varepsilon(x) = x \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

Propriété 5.1.1.

i) Si f admet un (D.L) d'ordre n au voisinage de 0, alors

$$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0.$$

ii) Si f admet un (D.L) d'ordre $\geqslant 1$ au voisinage de 0, alors f est dérivable en 0.

Preuve. i/ Si $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, alors

$$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0.$$

ii/ Si $n \geqslant 1$ alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}(x) = f'(0) = a_1$.

Exemples 5.1.1.

1) Soit $f(x) = e^x$, cette fonction appartient à $C^n(\mathbb{R})$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$. De plus, on a $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ce qui implique que : $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, x[$ ou bien $c \in]x, 0[$ telle que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c.$$

d'où

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) = xe^c \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

2) Soit $g(x) = \sin(x)$, *c'est une fonction impaire de classe* C^∞. *On a*

$$g^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. *D'où pour* $x = 0$, *on a*

$$g^{(2k)}(0) = 0 \quad \textit{et}\; g^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

On a alors

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2k+1}\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} x^{2k+1}\varepsilon(x) = 0$.

3) Pour la fonction $\cos x$ *on obtient le développement limité suivant*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + x^{2k}\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} x^{2k}\varepsilon(x) = 0$.

4) Soit la fonction $h(x) = (1+x)^\alpha$ *où* $\alpha \in \mathbb{Z}$. *On obtient grâce à la formule de Taylor-Lagrange, le développement limité suivant*

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + .. \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

où $\varepsilon(x) = \frac{x}{(n+1)!}h^{(n+1)}(c)$, *où* c *est compris entre* 0 *et* x.
En particulier pour $\alpha = -1$, *on a*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + .. + (-1)^n x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\frac{1}{1+c})^{(n+1)}$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + .. + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

De même pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, *on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2!}x + \frac{3}{2^2.2!}x^2 - \frac{3.5}{2^3.3!}x^3 + .. \\ &+ (-1)^n \frac{3.5...(2n-1)}{2^n.n!}x^n + x^n\varepsilon(x).\end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{3}{2^2.2!}x^2 + \frac{3.5}{2^3.3!}x^3 + .. + \frac{3.5...(2n-1)}{2^n.n!}x^n \\ &+ x^n\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1/2$ *on a*

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2.2!}x^2 + \frac{3}{2^3.3!}x^3 + ... \\ &+(-1)^{n+1}\frac{3.5...(2n-3)}{2^n.n!}x^n + x^n\varepsilon(x), (\ n \geqslant 2).\end{aligned}$$

5.2 Opérations sur les développements limités

Proposition 5.2.1. *Si f et g admettent des (D.L) au voisinage de 0, d'ordre respectivement n_1 et n_2. Alors $f+g$ admet un (D.L) d'ordre $n = \min(n_1, n_2)$ au voisinage de 0.*

Preuve. Si

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n_1}x^{n_1} + x^{n_1}\varepsilon(x)$$

et

$$g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_{n_2}x^{n_2} + x^{n_2}\alpha(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = 0$. Supposons que $n_1 \leqslant n_2$ alors

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x + .. + (a_{n_1}+b_{n_1})x^{n_1} + \\ &\quad x^{n_1}(\varepsilon(x) + b_{n_1+1}x + .. + b_{n_2}x^{n_2-n_1}) + x^{n_2}\alpha(x).\end{aligned}$$

Proposition 5.2.2. *Si f et g admettent des (D.L) d'ordre n au voisinage de 0, alors fg admet un (D.L) d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est obtenue en faisant le produit des deux parties régulières et en ne gardant que les monômes de degré* inf*érieur ou égale à n.*

Preuve. Si $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ *et* $g(x) = Q(x) + x^n\alpha(x)$ alors

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n(Q(x)\varepsilon(x) + P(x)\alpha(x) + \varepsilon(x)\alpha(x)).$$

Exemple 5.2.1. *Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction* $f(x) = e^x\sqrt{1+x}$ *est donné comme suit*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)$$

et

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\alpha(x).$$

Donc

$$e^x\sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + x^2\beta(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} x^2\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2\beta(x) = 0.$

Proposition 5.2.3. *Si f et g admettent des (D.L) d'ordre n au voisinage de 0 et si* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$, *alors $\frac{f}{g}$ admet un (D.L) d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est obtenue en effectuant la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière de f par celle de g à l'ordre n.*

Preuve. Si $f(x) = A(x) + x^n\epsilon(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n\alpha(x)$, avec $\lim_{x\longrightarrow 0}\epsilon(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}\alpha(x) = 0$. D'abord, comme $\lim_{x\longrightarrow 0} g(x) \neq 0$ alors g ne s'annule pas sur un voisinage de 0. De plus $\lim_{x\longrightarrow 0} g(x) = b \neq 0$ ($B(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$). D'autre part, en effectuant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de $A(x)$ par $B(x)$. On obtient

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^n\epsilon_1(x)$$

où $\epsilon_1(x) = xR(x)$ est un terme qui tend vers zéro quand x tend vers zéro. Ce qui entraîne que

$$f(x) = B(x)Q(x) + x^n\epsilon_1(x) + x^n\epsilon(x)$$

$$f(x) = [g(x) - x^n\alpha(x)]Q(x) + x^n\epsilon_1(x)) + x^n\epsilon(x)),$$

$$f(x) = g(x)Q(x) + x^n(\epsilon_1(x) + \epsilon(x) - \alpha(x)Q(x)).$$

D'où

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{x^n}{g(x)}(\epsilon_1(x) + \epsilon(x) - \alpha(x)Q(x)).$$

On a bien
$$\epsilon_2(x) = \frac{\epsilon_1(x) + \epsilon(x) - \alpha(x)Q(x)}{g(x)}$$
tend vers zéro quand x tend vers zéro, puisque $g(x) \neq 0$ au voisinage de 0 et sa limite est finie et vaut b.

Exemple 5.2.2. *Le (D.L) à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction* $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx$ *est donné comme suit*
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon(x)$$
et
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\alpha(x).$$
En effectuant la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière de $\sin x$ *par celle de* $\cos x$*, on obtient*
$$\begin{array}{llll|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & & \\
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{5-5}
0 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & & \\
 & 0 & \frac{2x^5}{15} & &
\end{array}$$
d'où
$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

5.2.1 Développement limité d'une composition

Proposition 5.2.4. *Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0, de parties principales respectives $P(X)$ et $Q(X)$. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, alors gof admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie principale est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n, dans le polynôme $Q(P(X))$.*

Preuve. Si
$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

et
$$g(x) = Q(x) + x^n \gamma(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \gamma(x) = 0$$
et puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, alors on a :
$$g(f(x)) = Q(f(x)) + f(x)^n \gamma(f(x)) \ ,$$
d'autre part, on a
$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \\ & = & xP_1(x) \end{array}$$
d'où
$$\begin{array}{rcl} f(x)^n\gamma(f(x)) & = & (xP_1(x) + x^n\varepsilon(x))^n\gamma(f(x)) \\ & = & x^n(P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon(x))^n\gamma(f(x)) \\ & = & x^n\delta(x) \end{array}$$
avec $\delta(x) = (P_1(x) + x^{n-1}\varepsilon(x))^n\gamma(f(x))$
ce qui implique que $\lim_{x\to 0}\delta(x) = 0$, car $\lim_{x\to 0}\gamma f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} x^{n-1}\varepsilon(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} P_1(x) = a_1$. D'un autre côté, si nous supposons que
$$Q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n,$$
alors
$$Q(f(x)) = b_0 + b_1(P(x) + x^n\varepsilon(x)\ ) + ... + b_n(P(x) + x^n\varepsilon(x)\ )^n.$$
Le développement de cette expression peut s'écrire sous la forme suivante
$$\begin{array}{rcl} Q(f(x)) & = & b_0 + a_1b_1x + (a_2b_1 + a_1^2b_2)x^2 + (a_3b_1 + 2a_1a_2b_2 + a_1^3b_3)x^3 + \\ & & +..(a_nb_1 + ..a_1^nb_n)x^n + x^n\theta(x) \end{array}$$
avec
$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = 0.$$
Enfin, en posant, $\epsilon = \delta + \theta$, on obtient
$$g(f(x)) = Q(P(x)) + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Exemple 5.2.3. *Soit à développer à l'ordre 4 la fonction* $f(x) = \ln(\cos x)$*.*

On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Posons, $\cos x = 1 + u$ (avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$). Comme

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4\ \gamma(u) \text{ avec } \lim_{u\to 0}\gamma(u) = 0$$

alors

$$\ln(\cos x) = (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})^2 + \frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})^3 - \frac{1}{4}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})^4 + x^4\theta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\theta(x) = 0.$$

En négligeant les puissances de x d'ordre supérieur à 4, on obtient

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4\theta(x).$$

5.2.2 Développement limité d'une dérivation

Proposition 5.2.5. *Soit f une fonction de classe C^1 dans un voisinage de 0 sur lequel elle admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$, au voisinage de 0, alors sa partie principale est exactement la dérivée de la partie principale du (D.L) de f.*

Preuve. Si

$$f^{'}(x) = a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$$

alors

$$f(x) = f(0) + a_1x + \frac{a_2x^2}{2} + ... + \frac{a_nx^n}{n} + x^n\epsilon_1(x),$$

avec $lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$.

Exemple 5.2.4. *Nous avons vu grâce à la formule de Taylor que*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0,$$

et que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^nx^n + x^n\theta(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0}\theta(x) = 0.$$

On voit bien que la partie principale du développement limité de $\frac{1}{1+x}$ s'obtient en dérivant la partie principale du développement de $\ln(1+x)$.

5.2.3 Développement limité d'une primitive

Proposition 5.2.6. *Soit f une fonction continue sur un voisinage V de 0 et admettant dans ce voisinage le développement limité d'ordre n suivant*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

alors toute primitive F de f (i.e. $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in V$), admet le développement limité d'ordre $n+1$ suivant

$$F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1} \varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Exemple 5.2.5. *On sait qu'une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est $arctgx$ et que*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n} \alpha(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0,$$

d'où

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1} \theta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \theta(x) = 0.$$

5.2.4 Développements limités usuels.

Fonctions	**Développements limités**
$\mathbf{e^x}$	$\mathbf{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)}$
$\cos \mathbf{x}$	$\mathbf{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+x^{2n}\varepsilon(x)}$
$\sin \mathbf{x}$	$\mathbf{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)}$
$\mathbf{(1+x)^\alpha}$	$\mathbf{1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)}$
$\mathbf{\sqrt{1+x}}$	$\mathbf{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+...+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4...2n}x^n+x^n\varepsilon(x)}$
$\mathbf{\frac{1}{1+x}}$	$\mathbf{1-x+x^2+...+(-1)^nx^n+x^n\varepsilon(x)}$
$\ln\mathbf{(1+x)}$	$\mathbf{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)}$
$\mathbf{\frac{1}{1-x}}$	$\mathbf{1+x+x^2+...+x^n+x^n\varepsilon(x)}$
arctgx	$\mathbf{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+1}\varepsilon(x)}$
arcsinx	$\mathbf{x+\frac{x^3}{2.3}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}+...+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+1}\varepsilon(x)}$
$\mathbf{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}$	$\mathbf{1-\frac{x}{2}+\frac{1.3}{2.4}x^2+...+(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...2n}x^n+x^n\varepsilon(x)}$.

5.3 Extension du développement limité.

5.3.1 Développement limité au voisinage de l'infini.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$, $a\in\mathbb{R}$. On dit que la fonction f admet un développement d'ordre n au voisinage de l'infini, si la fonction $F(x)=f(\frac{1}{x})$ admet un développement au voisinage de 0 à l'ordre n. Dans ce cas, on a

$$F(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n+x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

et donc
$$f(x) = a_0 + a_1\frac{1}{x} + ... + a_n\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$
Une condition nécessaire pour que f admette un développement limité au voisinage de l'infini est que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ soit finie.

Exercice 5.3.1. *Donner le développement limité au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.*

On pose $F(x) = f(\frac{1}{x})$,
$$\begin{aligned} F(x) &= f(\frac{1}{x}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} \\ &= \frac{1}{x}\sqrt{1+x+x^2} \text{ (car } x > 0). \end{aligned}$$
Or
$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + y^2\delta(y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y\to 0} \ \delta(y) = 0,$$
d'où
$$\sqrt{1+x+x^2} = 1 + \frac{(x+x^2)}{2} - \frac{(x+x^2)^2}{8} + x^2\delta_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \ \delta_1(x) = 0$$
et
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{x}(1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + x^2\delta_1(x)) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{3x}{8} + x\delta_1(x), \end{aligned}$$
d'où
$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\delta_1(\frac{1}{x})$$
c'est donc le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de l'infini.

5.3.2 Développement limité généralisé.

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0. Nous supposons que la fonction f n'admet pas de développement limité au voisinage de 0, mais qu'il existe un entier $k > 0$ tel que la fonction $x^k f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. On a pour $x \neq 0$

$$x^k f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui implique que

$$f(x) = x^{-k}(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)).$$

Une telle expression est dite développement limité généralisé d'ordre $n-k$ de f au voisinage de 0.

Exemple 5.3.1. *La fonction $f(x) = cotg(x)$ n'admet pas de développement limité au voisinage de 0, puisque $\lim\limits_{x \to 0} cotg(x) = \infty$. Mais on peut écrire au voisinage de 0*

$$\begin{aligned} xcotg(x) &= \frac{x \cos x}{\sin x} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4 \alpha(x)}. \end{aligned}$$

En effectuant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 4, on trouve

$$cotg(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + x^3 \beta(x),$$

c'est le développement limité généralisé de f d'ordre 3 au voisinage de 0.

5.3.3 Applications des développements limités.

Application à la recherche des limites.

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ où $f(x) = \frac{x(1+\cos x) - 2tgx}{2x - \sin x - tgx}$. Nous avons au voisinage de 0

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x) \\ & \quad \text{et} \\ 2tgx &= 2x + \frac{2x^3}{3} + x^3 \varepsilon_3(x). \end{aligned}$$

Alors au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(2 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x)) - 2x - \frac{2x^3}{3} - x^3 \varepsilon_3(x)}{2x - (x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)) - (x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_4(x))} \\ &= \frac{-\frac{7}{6} x^3 + x^3 \varepsilon_5(x)}{-\frac{1}{6} x^3 + x^3 \varepsilon_6(x)} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, ..., 6)$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 7$.

Etude au voisinage d'un point (application aux graphiques des fonctions)

Supposons que f est de classe C^2 au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^2}{2}\varepsilon(h), \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0,$$

or l'équation de la tangente à la courbe de f au point $M_0 = (a, f(a))$ est

$$y = f(a) + (x-a)f'(a)$$

ou encore, si $x = a + h$

$$y = f(a) + hf'(a)$$

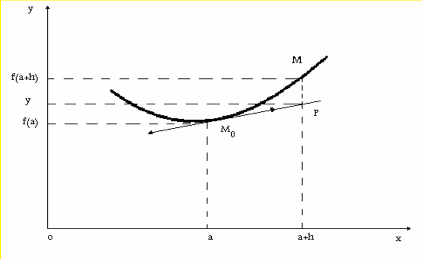

FIGURE 5.1 – représentation graphique de la courbe de f

La position de la courbe par rapport à sa tangente au point M_0 est déterminée par le signe de

$$\begin{aligned}\overline{PM} &= f(a+h) - y \\ &= \frac{h^2}{2}(f''(a) + \varepsilon(h)),\end{aligned}$$

ce signe est celui de

$$f''(a) + \varepsilon(h).$$

Mais comme , $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, alors le signe est donné par celui de $f''(a)$.
Si $f''(a) < 0$, la courbe est située au-dessous de la tangente en M_0.

Si $f''(a) > 0$, la courbe est située au-dessus de la tangente en M_0 (FIG. 5.1). Dans le cas où $f''(a) = 0$ et si $f'''(a)$ existe et si elle est continue dans un voisinage de a, on effectue le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de a, on trouve que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{'''}(a) + \frac{h^3}{3!}\varepsilon(h), \ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0,.$$

On a alors

$$\overline{PM} = \frac{h^3}{3!}(f^{'''}(a) + \varepsilon(h)).$$

Donc le signe de $\overline{PM}$ dans un voisinage de M_0 est donné par le signe de $\frac{h^3}{3!}f^{'''}(a)$ car l'autre terme est aussi petit que l'on veut. Mais il est facile de remarquer que ce signe change avec le signe de h, selon que $h > 0$ ou bien que $h < 0$, ce qui se traduit par le fait que la courbe de f traverse sa tangente au point M_0 (FIG. 5.2). On dit que M_0 est un point d'inflexion.

Exemple 5.3.2. *Soit à étudier au voisinage du point $x_0 = 1$, suivant les valeurs de a, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + 3x^2 + x$. Nous avons les différents cas de figures suivants*

Si $a = -1$

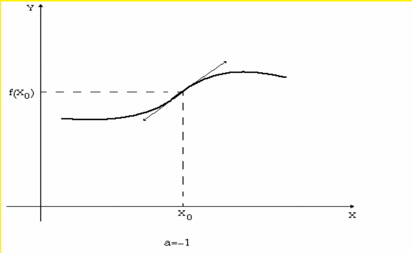

FIGURE 5.2 –

Si $a \leq -1$

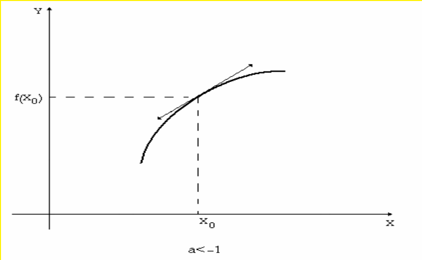

FIGURE 5.3 –

Si $a \geq -1$

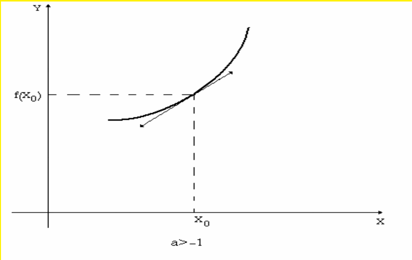

FIGURE 5.4 –

Étude des branches infinies.

a) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation : $(X = x_0)$.
b) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$, la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation : $(Y = y_0)$.
c) Supposons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et que f admet le développement limité généralisé au voisinage de l'infini

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^m} + \frac{1}{x^m}\varepsilon(x) \ avec\ m \geq 1\ et\ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ et\ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Dans ce cas la position de la courbe par rapport à l'asymptote (FIG. 5.3 et FIG. 5.4) est donnée par le signe de $f(x) - (ax+b)$, c'est-à-dire par le signe de c (car $x^m > 0$ lorsque $x \to +\infty$).

Exemple 5.3.3. *Soit la fonction*

$$f(x) = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}.$$

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Cherchons le développement limité de* f *au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$. *En posant* $X = \frac{1}{x}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\frac{1}{X}+2}{\frac{1}{X^2}}\sqrt{\frac{1}{X^2}-1} \\ &= \frac{X(1+2X)}{|X|}\sqrt{1-X^2}.\end{aligned}$$

i/ Si $X > 0$, *au voisinage de* 0,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= (1+2X)\sqrt{1-X^2}. \\ &= (1+2X)(1-\frac{X^2}{2}+X^2\varepsilon(X)) \\ &= 1+2X-\frac{X^2}{2}+X^2\varepsilon_1(X) \\ & 1+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_1(\frac{1}{x}),\end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = x+2-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon_1(\frac{1}{x}),$$

donc la droite d'équation $(y = x+2)$ *est asymptote à la courbe de* f *et* $(f(x)-(x+2) = -\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon_1(\frac{1}{x}))$ *est du signe* $-\frac{1}{2x}$ *qui est négatif, donc la courbe est située au-dessous de son asymptote.*
ii/ Si $X < 0$, *au voisinage de* 0,

$$\frac{f(x)}{x} = -(1+2X)\sqrt{1-X^2}$$

et on trouve

$$f(x) = -x-2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2(\frac{1}{x}).$$

La droite $(y = -x-2)$ *est asymptote à la courbe de* f, *qui est située au-dessus de cette asymptote.*

Bibliographie

1] Abou Hazim, Mhamed El Mountassir, Abderrahim Abkari, *Cours élémentaire de mathématiques superieures tome 1.* Collection, Maths-Plus.

[2] Y. Bougorov, S. Nikolski, *Cours de Mathématiques supérieures tome 1* (traduit du Russe) edition de Moscou.

[3] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Cours d'analyse I,* Armand Colin-Collection U.

[4] N. Bourbaki, Livre III, *Topologie générale (2^{eme} édition),* Herman Paris, 1958-61.

[5] M. Chidami et M. Rachidi, *Problèmes d'examens de mathématiques premier cycle de Fac.,* Sochepress.

[6] J. Dieudonne, Elément d'analyse Tome 1, Gauthier Villars.

[7] J. Dixmier, *Cours du 1^{er} cycle,* Gauthier Villars.

[8] F. Delmer, *Mathématiques, Rappel du cours et problèmes corrigés (1^{er} cycle),* Dunod Université.

[9] A. Doneddou, *Fonctions réelles d'une variable réelle 4,* classes préparatoires, Vuibert.

[10] G. Froty, Toplogie et analyse , Tome 1 (Classe préparatoires), Vuibert.

[11] J. Lelong-Ferrand, J. M. Arnaudiès, *Cours de mathéma-*

tiques, Tome 2, Analyse, 4ieme édition, Dunod Univercité.

[12] Xavin Merlin, *Méthodix analyse,* exercices corrigés, Ellipses.

[13] Jean-Marie Monier, *Analyse I, cours et exercices Corrigés* 1^{ere} année MPSI, PCSI, PTSI 2^{eme} édition, Dunod.

[14] Raymond Couty et Jaques Ezra, *Analyse MP première année et spéciales A, A',* Armand Colin.