A. Charifi, B. Bouikhalene, S. Kabbaj, E. Elqorachi.

Tome I

ANALYSE DANS $\mathbb{R}$

Partie EXERCICES

1^{er} et 2^{e} Semestre de la 1^{re} année $(S_1\&S_2)$
Facultés des Sciences,
Section Mathématique CRMEF,
Classes Préparatoires
et Classes Integrées aux grandes écoles.

Colletion : Enseignants Etudiants (EE)
2015

Tome I

ANALYSE DANS $\mathbb{R}$

Partie EXERCICES

1^{er} et 2^{e} Semestre de la 1^{re} année $(S_1\&S_2)$
Facultés des Sciences,
Section Mathématique CRMEF,
Classes Préparatoires
et Classes Integrées aux grandes écoles.

Par

A. Charifi,
PES, CRMEF Rabat-Salé-Kénitra

B. Bouikhalene,
PH, FP Beni Mellal

S. Kabbaj,
PES, F.SC. Kénitra

E. Elqorachi,
PES, F.SC. Agadir

Collection : Enseignants Etudiants (EE)
Version : OPEN ACCESS
2015

Dépôt légal $N°$: 2017 MO 1008
ISBN : 978-9954-39-738-1

Préface

L'objet de cet ouvrage est de mettre à la diposition des étudiants, un recueil sélectionné d'exercices variés, pour permettre l'acquisition de certaines heuristiques de résolution de problèmes de l'analyse réelle. Ces exercices sont choisis d'un degré de difficulté couramment rencontré dans les examens et les devoirs surveillés.

Malgré certaines de ses imperfections, nous espèrons que le présent ouvrage rendra service aux étudiants, aux enseignants et aux lecteurs, et qu'il en sera fait un bon usage.

Les auteurs

Table des matières

Chapitre 1

EXERCICES

1.1 Exercices avec solutions

1.1.1 Énoncés

Exercice 1.1.1.

i) a) Montrer que tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$.
b) Montrer que l'ensemble des irrationnels $(\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathbb{R}$.

ii) Soit $E = \{x \in \mathbb{Q} / \ x^2 < 2\}$.

α) Montrer que E admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

β) Montrer que E n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

γ) Conclure.

iii) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, vérifiant les deux propriétés suivantes

a) si $a, b \in A$, alors $\frac{a+b}{2} \in A$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a, b \in A$, tel que $a < x < b$.
Montrer que A est par tout dense dans $\mathbb{R}$.

iv) Montrer que si S et T sont deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} S \cup T = \mathbb{R} \\ \forall s \in S \ \text{ et } \ \forall t \in T, \ \text{ on a } \ s < t, \end{cases}$$

alors il existe un et un seul $(\exists!)$ $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $(s \le \beta \le t)$ pour tout $s \in S$ et pour tout $t \in T$.

v) *Montrer que pour* $A, B \subset \mathbb{R}$, *on a :* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \overset{o}{\widehat{A \cap B}}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *et que* $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\widehat{A \cup B}}$. *Donner des exemples pour les quels les deux dernières inclusions sont strictes.*

vi) *Déterminer les bornes supérieures et inférieures puis le maximum et le minimum s'ils existent des ensembles suivants*
$A = \left\{\frac{1}{n+1} / \ \ n \in \mathbb{N}\right\}$, $B = \{2\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n+1} / \ \ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{1\}$
$E = \left\{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \ \ / \ \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
$C = \left\{\frac{-1}{n} + [1 + (-1)^n]\, n^2 \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *et*
$D = \left\{\frac{(-1^n + 1)}{(-1)^n - (-1)^{n+1}} \ / \ n \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

vii) a) *Montrer que si* S *est un sous ensemble non vide minoré de* $\mathbb{R}$, *alors*

$$T = \{-x / x \in S\}$$

est majoré et on a

$$\sup T = -\inf S.$$

b) *Soient* S *et* T *deux sous ensembles non vide de* $\mathbb{R}$ *et notons*

$$S + T = \{s + t / s \in S \ \ \text{et} \ \ t \in T\}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \sup(S+T) &= \sup S + \sup T \\ & \quad \textit{et} \\ \inf(S+T) &= \inf S + \inf T. \end{aligned}$$

c) *Soit* T *un sous ensemble non vide borné de* $\mathbb{R}$ *et soit* a, b *deux nombres réels fixés. Notons*

$$S = \{at + b / t \in T\}.$$

Calculer $\inf S$ *et* $\sup S$ *en fonction de* a, b, $\inf T$ *et* $supT$.

Exercice 1.1.2.

A) *Soit* $\mathbb{R}$, *considéré ici comme un groupe additif, muni de sa topologie usuelle et soit* G *un sous groupe de* $\mathbb{R}$ *:*

1) *Montrer que si* 0 *est un point isolé de* G, *alors tout point de* G *est isolé et que* G *est discret et fermé dans* $\mathbb{R}$ *et donner sa forme.*

2) *Montrer que si* 0 *est un point d'accumulation de* G, *alors celui ci est partout dense dans* $\mathbb{R}$. *En déduire ainsi les sous groupes fermés de* $\mathbb{R}$.

3) *On considère* $\alpha \notin \mathbb{Q}$, *montrer que* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ *est un sous groupe partout dense dans* $\mathbb{R}$. *En déduire les valeurs d'adhérence de la suite* $(e^{2ni\pi\alpha})_{n\in\mathbb{Z}}$.

B) *Soit* I *un intervalle ouvert. On veut montrer qu'il n'existe pas de sous ensembles ouverts non vides* A *et* B *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $I = A \cup B$ *et* $A \cap B = \varnothing$. *On suppose que c'est le cas et on veut aboutir à une contradiction. On considère pour cela* $(a \in A)$ *et* $(b \in B)$ *et l'ensemble*

$$E = \{t \in [0,1] \,/\; a + t(b-a) \in A\}\,.$$

1) *Montrer que* E *admet une borne supérieure, que l'on appelera* T.

2) *Montrer que :* $a + T(b-a) \notin A$.

3) *En déduire que :* $a + T(b-a) \in B$.

4) *Montrer que ceci contredit le fait que* T *soit la borne supérieure de* E.

C) *Soit* A *une partie bornée de* $\mathbb{R}$ *ayant un seul point d'accumulation* a.

i) *Montrer que* A *est dénombrable.*

ii) *On numérote les éléments de* A *d'une manière quelconque :* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. *Montrer que la suite* $(x_n)_n$ *converge vers* a.

D) 1) *Soient* a, b *deux réels distincts. Montrer que* $\{a, b\}$ *est non connexe.*

2) *Soient* f *et* g *deux fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^*$ *qui vérifient*

$$\begin{cases} f(0) = g(0) & ; \\ f^2(t) = g^2(t), & \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Montrer que $f(t) = g(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

E) *1)* *Rappeler la définition d'un homéomorphisme entre deux sous ensembles non vides de* $\mathbb{R}$.

2) *Montrer que* $\mathbb{R}$ *est homéomorphe à* $]0,1[$. *Expliciter* f *et* f^{-1}.

F) *Donner des contre exemples pour les fausses assertions suivantes.*
i) *Les points isolés d'un ensemble forment un ensemble fermé ?*
ii) *Pour* $S \subset \mathbb{R}$, *on appelle frontière de* S *et on note*

$$\delta S = \overline{S} \setminus \overset{o}{S}.$$

Montrer alors que l'on a :
a) $\delta(S \cup T) = \delta S \cup \delta T$;
b) $\delta(\delta S) = \delta S$;
c) $\delta \overline{S} = \delta S$.

Exercice 1.1.3.
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
i) $f(x) = \frac{1}{x^6+x^4+1}$, *ii)* $g(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$,

iii) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{si } x > -1\ ; \\ \ln(-1-x), & \text{si } x < -1\ ; \\ 0, & \text{si } x = -1. \end{cases}$

iv) $k(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ *et v)* $p(x) = \sqrt{x^2+5x-6}$.
v) *Donner le domaine de définition de* f *si*

$$\exp(f(x)^2) = x \quad et \quad f(x) \geq 0.$$

vi) *Donner le domaine de définition de* fog *et* gof *dans les deux cas suivants :*
a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ *et* $g(x) = \cos(x)$;
b) $f(x) = \sqrt{x}$ *et* $g(x) = \sin(2x)$.

Exercice 1.1.4.
On considère la suite numérique définie par

$$u_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} + a^n \ , \quad avec\ a \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}.$$

1) *Montrer que pour* $a > 1$, *la suite est divergente.*

2) *Montrer que si* $a \in [0,1]$, *la suite est décroissante.*

3) Déterminer deux nombres A*et* B *tels que l'on ait*

$$u_n = \frac{A}{3n+1} + \frac{B}{3n+4} + a^n \ .$$

En déduire une expression simple de la somme

$$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n.$$

4) En supposant que : $0 < a < 1$*, trouver la limite de* s_n *quand* n *tend vers l'infini.*

Exercice 1.1.5.

A) Soit $(u_n)_n$ *la suite numérique de terme général*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } n \neq 0.$$

1) Montrer que pour tout $k \geq 2$*, nous avons*

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2) En déduire que la suite $(u_n)_n$ *est majorée.*

3) Montrer que cette suite est convergente.

B) On considère la suite de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

En déterminant le plus grand et le plus petit terme de la somme s_n*, donner un encadrement de* s_n*. Déduire la limite de* s_n*.*

C) Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

et que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} p.$$

Exercice 1.1.6.
Soit $(u_n)_n$ *la suite numérique définie par* $u_0 = a$ *et*

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}}.$$

1) *Etudier la monotonie de* $(u_n)_n$ *et prouver qu'elle est convergente. Pour* n *un entier naturel non nul, on définit la suite* $(w_n)_n$ *par*

$$w_n = \frac{1}{{u_n}^2} - \frac{1}{{u_{n-1}}^2}.$$

2) *Determiner explicitement* w_n.

3) *En calculant de deux façons diférentes* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} w_k$, *déterminer* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} nu_n^2$.

Exercice 1.1.7. *(Extrait de l'Examen d'Analyse, 2005 SMA/SMI, Rattrapage, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir.)*

1) *Soit* $(u_n)_n$ *une suite numérique telle que les deux suites extraites* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *convergent vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $(u_n)_n$ *converge vers* l.

2) *Soit la suite récurrente définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = 2 + \frac{3}{u_n} \end{cases}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ *est bien définie.*

3) *La suite* $(u_n)_n$ *est-elle monotone ?*

4) *Etudier les suites* $v_p = u_{2p}$, $w_p = u_{2p+1}$ *et calculer leurs limites.*

5) *En déduire la nature de la suite* $(u_n)_n$.

Exercice 1.1.8.
Etudier la convergence des suites

$u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$;
$u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$, *(calculer sa limite) ;*
$u_0 = \frac{1}{2}$ *et* $u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{u_n+2}$.

Exercice 1.1.9.
Etudier la suite numérique définie par u_0 *quelconque et*

$$u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 1.1.10.

A) Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1.$$

Est ce que les expressions suivantes sont vraies ?

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)}=1 \ \textit{et} \ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)}=1$$

B) (Extrait de l'Examen d'Analyse MP1, 1999, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir.)

On considère les deux suites définies par

$$u_0=a,\ v_n=\frac{a}{u_n}\ \textit{et}\ u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\ (a>0).$$

1) Montrer que $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont deux suites adjacentes.*

2) Calculer la limite commune à $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$.

C) Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites telles que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n^2+u_nv_n+v_n^2)=0$$

montrer que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}u_n=\lim_{x\longrightarrow+\infty}v_n=0.$$

Exercice 1.1.11.

A) Calculer les limites suivantes

i) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x+x^3}$, *ii)* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$, *iii)* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(1+\frac{1}{x})^{-x}$, *iv)* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}$,
v) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$, *vi)* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}$.

B) i) Etudier la limite en fonction de a, de la fonction suivante

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + (a-1)x - 3a + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$, 3 et 1, où a est un nombre réel.
ii) Calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right).$$

iii) Soit

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{\sqrt{x+2} - 1}.$$

Etudier les limites de f quand x tend vers -1 et $+\infty$.

C) Déterminer le domaine de définition et les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4}, \\ g(x) &= -2x + \sqrt{3(x^2 - 1)}, \\ h(x) &= x \ln\left(x + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Exercice 1.1.12.

Etudier la continuité des fonctions ci-dessous et donner leur prolongement par continuité s'il existe.

i) $f(x) = \frac{|x|}{x} e^{-(1/x^2)}$;

ii) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \ln(1 - \frac{1}{2x})}, & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1/2\,; \\ 0, & \text{si } 0 \le x \le 1/2. \end{cases}$

iii) $h(x) = \begin{cases} e^x + 1, & \text{si } x \le 0\,; \\ \frac{2}{1 + e^{-1/x}}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Exercice 1.1.13.

Montrer les assertions suivantes

i) L'équation $xe^x = 2e$ admet une solution dans $[-1, 2]$;

ii) Le polynbôme $X^3 - X + 1$ admet une racine réelle ;

iii) La fonction $f(x) = 2 + \ln x$, admet un point fixe dans l'intervalle $[1, e^2]$.

Exercice 1.1.14.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \begin{cases} (2x+1)\sin(\frac{1}{2x+1}), & si\ x \neq \frac{-1}{2}\ ; \\ 0, & si\ x = \frac{-1}{2}. \end{cases}$ *Montrer, en utilisant la définition de la continuité que f est continue au point $x = \frac{-1}{2}$.*

Exercice 1.1.15.
Etudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\ln(1-\frac{1}{2x})}, & si\ x < 0\ ou\ si\ x > \frac{1}{2}\ ; \\ 0, & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Exercice 1.1.16.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle. En déduire que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 1.1.17.
Donner le prolongement par contnuité des fonctions suivantes

$$f(x) = xE(\frac{1}{x}),\ \ g(x) = \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin x} \quad et \quad h(x) = \frac{1}{x},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 1.1.18.
Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

i) Montrer par un calcul direct que f est strictement monotone.

ii) En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 1.1.19.
Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & si\ x \neq 0\ ; \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$ *et* $g(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq 0\ ; \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$

i) Calculer $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+0} g(x)$.

ii) Les fonctions gof *et* fog *admetent elles une limite en* 0 *?*

Exercice 1.1.20.
Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors les ensembles* $\{x \in \mathbb{R} \mid \ f(x) > a\}$ *et* $\{x \in \mathbb{R} \mid \ f(x) < a\}$ *sont des ouverts et que l'ensemble,* $\{x \in \mathbb{R} \mid \ f(x) = a\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$.

Exercice 1.1.21.
Soient f *et* g *deux fonctions définies et continues sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que si* $f = g$ *sur* $\mathbb{Q}$, *alors* $f = g$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 1.1.22.
Etudier la continuité des fonctions suivantes

i) f *définie sur* $]0, 1[$ *par*
$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in \mathbb{Q}\,; \\ 1 - x, & si\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}. \end{cases}$$

ii) g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & si\ x \in \mathbb{Q}^*\,; \\ x, & si\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\,; \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exercice 1.1.23.
Etudier la continuité et le prolongement par continuité de la fonction suivante

$$g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)}.$$

Exercice 1.1.24.
Soit f *une fonction définie et continue sur un intervalle* $I = [a, b]$ *et à valeurs dans ce même intervalle.*

i) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ *admet au moins une solution dans* I.

ii) Vérifier que ce résultat cesse d'être vrai si I *est un intervalle non fermé ou non borné.*

Exercice 1.1.25.

i) Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

ii) Etudier la continuité uniforme de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ *sur* $\mathbb{R}$ *et montrer qu'elle n'est pas lipcshitzienne et conclure.*

Exercice 1.1.26.
Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes

1) $x \longmapsto \sin(x^2)$ *sur* $\mathbb{R}$.
2) $x \longmapsto \sin(\frac{1}{x})$ *sur* $]0, +\infty[$.

Exercice 1.1.27.
Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que si* f *admet une limite finie en* $+\infty$ *alors* f *est uniformément continue sur* $]0, +\infty[$. *La réciproque est elle vraie ?*

Exercice 1.1.28.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1 & si \;\; x \geq 0 \\ \ln(|x| + 1) & si \;\; x < 0 \end{cases} .$$

Etudier la continuité de la fonction f.

Exercice 1.1.29.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 1,$$

montrer que f *s'annule en un point de* $]0, e[$.

Exercice 1.1.30. *(Extrait de l'Examen d'Analyse,* 1^{er} *semestre SMA/SMI 2005, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir).*

A) Soit f *la fonction définie sur* $[0, \infty[$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2)\ln(\frac{x}{2-x}), & si\ 0 < x \leq 1\,; \\ 0, & si\ x = 0\,; \\ -2(x-1)^{2-x}, & si\ x > 1. \end{cases}$$

a) *Etudier la continuité de* f.
b) *Etudier la dérivabilité de* f *et donner l'expression de la fonction dérivée.*
c) *Montrer qu'il existe* $a \in]0, 1[$ *tel que* $f'(a) = 0$.
d) *Montrer que* f *est une bijection de* $[a, 2\ ]$ *sur* $[-2, f(a)]$ *et calculer* $(f^{-1})'(0)$.

B) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note* $u_n = (\frac{e}{n})^n \frac{n!}{\sqrt{n}}$.

1) *Etudier la monotonie de la fonction* $\varphi : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *définie par* $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}$.
2) *Tracer le tableau de variation de* φ.
3) *Montrer que* $(u_n)_n$ *est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.*

Exercice 1.1.31. *(Extrait de l'Examen d'Analyse,* 1^{er} *semestre SMA/SMI 2006, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir.)*

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \quad x^3 \sin(\frac{1}{x^2}) & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases} .$$

a) *Montrer que* f *est dérivable dans* $\mathbb{R}$ *et donner sa fonction dérivée* f' *puis étudier la continuité de cette fonction dérivée.*
b) *Montrer qu'il existe* $c \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$ *tel que* $x_0 = \frac{1}{c}$ *vérifie l'équation*

$$3 \sin x_0^2 - 2x_0^2 \cos x_0^2 = 0.$$

Exercice 1.1.32.
Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - x^2}{x^4}, \; \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - x^2}{x^3 \sin x} \;\; et \;\; \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}.$$

Exercice 1.1.33.
Montrer que l'on a les assertions suivantes

a) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x, \quad \forall x \in [0, \infty[$.
b) $\frac{x}{1+x^2} \leq arctg(x) \leq x, \quad \forall x \in [0, \infty[$.
c) $\alpha(1+x)^{\alpha-1} \leq (1+x)^\alpha - x^\alpha \leq \alpha x^{\alpha-1}, \quad \forall x \in]0, \infty[$ *et* $(0 < \alpha < 1)$.
En déduire la limite de la suite

$$u_n = \frac{1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + ... + n^{\alpha-1}}{n^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Exercice 1.1.34.
En utilisant la formule de Taylor,

a) Montrer que :

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}, \quad \forall x > 0.$$

En déduire la limite de la suite numérique définie par

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1).$$

b) Montrer que :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

et que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 1.1.35.
Soit la fonction définie par

$$f(x) = -\ln(\ln x).$$

i) Préciser le domaine de définition de f et son domaine de convexité.

ii) En déduire l'inégalité

$$\ln(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq (\ln x_1)^\lambda (\ln x_2)^\lambda, \quad x_1 > 1,\ x_2 > 1 \ \textit{et}\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

On retiendra l'inégalité obtenue pour $\lambda = 1/2$.

Exercice 1.1.36.
Trouver le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
i) $f_1(x) = \frac{x}{\sin x}$, *ii)* $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$, *iii)* $f_3(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, *iv)* $f_4(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ *v)* $f_5(x) = e^{\cos x}$.

Exercice 1.1.37.
Donner au voisinage de $+\infty$, le développement limité jusqu'à l'ordre 3 de la fonction f définie par

$$f(x) = arctg(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}).$$

Exercice 1.1.38.
Etudier les branches infinies de la fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[2]{x^2 - x - 1}.$$

Exercice 1.1.39.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit

$$f(x) = \frac{1 + x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

1) a) *Déterminer le domaine de définition de f.*
   b) *La fonction f est elle prolongeable par contnuité au point 0 ?*
2) *Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et que*

$$f'(x) = (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})g(x), \ \ \forall x \in D_f$$

   où g est une fonction positive à déterminer.
3) *Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $e^t > t$.*
4) *Etudier le signe de f'.*
5) a) *Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction*

$$h(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

   b) *En déduire le développement limité d'ordre deux au voisinage de l'infini de f.*
6) *Déterminer l'équation de l'asymptote et sa position par rapport à la courbe de f.*

Exercice 1.1.40.
On définit la fonction cosinus hyperbolique comme suit

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

i) *Etudier cette fonction (i.e. domaine de définition, continuité et dérivabilité), puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé.*
ii) *Montrer que la fonction (ch) est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I qu'il faut déterminer.*

iii) *Soit la fonction argument cosinus hyperbolique sa fonction réciproque définie par*

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ y & \longmapsto & \arg ch(y) \end{array}$$

où $\arg ch(y) = x$*, avec* $y \in I \Longleftrightarrow y = ch(x)$ *et* $x \in [0,+\infty[$.
Montrer que e^x *est solution de l'équation*

$$X^2 - 2yX + 1 = 0.$$

En déduire dans ce cas que

$$x = \arg ch(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

iv) *Calculer de deux façons différentes la dérivée de la fonction* $\arg ch$.

v) *Tracer sa courbe dans le même repère où est tracée celle de* ch.

Exercice 1.1.41. *(Examen d'Analyse de SMA/SMI, Janvier 2008, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir).*

A)

Question 1 : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On pose* $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1$.

1) *Montrer que pour chaque* $n \geq 1$*, il existe un unique* $u_n > 0$ *tel que* $P_n(u_n) = 0$.
2) *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *est strictement décroissante.*
3) *Prouver que* $u_n.\frac{u_n^n-1}{u_n-1} = 1$.
4) *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} u_n^n = 0$ *et en déduire la valeur de* $l = \lim_{n\to\infty} u_n$.

Question 2 : *Calculer le minimum de la fonction*

$$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par $g(x) = \frac{xM_2}{2} + \frac{M_0}{x}$*, ainsi que le point où il est atteint. Justifier votre réponse. (où* M_0 *et* M_2 *sont des constantes strictement positives).*

Question 3 : *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2*. On suppose que* f *et* f" *sont bornées respectivement par* M_0 *et* M_2.

1) *Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h > 0$. A partir de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f sur les intervalles $]x, x+h[$ et $]x-h, x[$, montrer que*

$$|f'(x)| \leq h\frac{M_2}{2} + \frac{M_0}{h}.$$

2) *En déduire que f' est bornée et que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

B) Soient deux réels a, b avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 telles que $f(a) < 0 < f(b)$; $f' > 0$ sur I° et $f'' > 0$ sur I°. Soit Γ la courbe représentatve de f.

1) *Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution ω dans l'intervalle $]a, b[$. On définit une suite $(x_n)_n$ par $x_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; x_n est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe Ox de la tangente à Γ au point d'abscisse x_{n-1}.*

2) *Faire un schéma. Montrer que l'on peut écrire*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

où φ est à expliciter en fonction de f.

3) *Montrer que : $\omega < x_{n+1} < x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*
En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{x_{n+1} - \omega}{(x_n - \omega)^2}.$$

4) *vérifier que φ est de classe C^2 sur I et que $\varphi'(x) = 0$.*
En déduire qu'il existe une constante positive M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; 0 \leq x_{n+1} - \omega \leq M(x_n - \omega)^2.$$

5) *Montrer qu'il existe un entier M tel que*

$$M(x_N - \omega) < 1.$$

En déduire l'existence de deux constantes $c > 0$ et $k \in]0, 1[$ telles que l'on ait,

$$0 \leq x_n - \omega \leq ck^{2^n}$$

(pour n assez grand).

Exercice 1.1.42. *(Extrait d'Examen d'Analyse de SMA/SMI, Rattrapage 2012 , F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir).*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{exp(x^2)-1}{x}, & si\, x \neq 0\,; \\ 0, & si\, x = 0. \end{cases}$$

1) *Montrer que f est une fonction dérivable et impaire sur $\mathbb{R}$.*
2) *Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{(2x^2-1)exp(x^2)+1}{x^2}$*
3) *Etudier le sens des variations de la fonction*

$$x \to (2x^2-1)exp(x^2)+1.$$

4) *Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
5) *En admettant que f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, déterminer le développement limité de f^{-1} (fonction réciproque de f) à l'ordre 5 au voisinage de 0.*

Exercice 1.1.43. *(Extrait d'Examen d'Analyse de SMA/SMI, Juin 2012 , F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir).*

Soit f la fonction réelle :

$$f(x) = exp(-\frac{1}{x^2})\ si\ x \neq 0\ et\ f(0) = 0.$$

Montrer par récurrence sur n :

$$\forall x \neq 0: \ f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})exp(-\frac{1}{x^2})$$

où P_n est un polynôme. En déduire que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = exp(-\frac{1}{x^2})sin(exp(\frac{1}{x^2}))\ si\ x \neq 0\ et\ g(0) = 0.$$

1) *Montrer que g admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.*
2) *La fonction g est-elle indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$?*

1.1.2 Solutions

Solution de l'exercice 1.1.1.

i)

a) Tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contient des rationnels. En effet, soient a et b deux nombres réels tel que $a < b$. Alors $b - a > 0$, donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$n(b-a) > b-a.$$

Donc quand on fait tendre n vers l'infini, $n(b-a)$ va tendre aussi vers l'infini, (i.e. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n(b-a) = +\infty$). Il existe alors $k_n \in \mathbb{Z}$, ($k_n = E(na)+1$, où E désigne la partie entière) tel que

$$na < k_n < nb$$

(car pour tout n assez grand $nb > na+1 \geq k_n > na$) autrement dit, pour n assez grand on a

$$a < \frac{k_n}{n} < b,$$

c'est-à-dire que $\frac{k_n}{n} \in \,]a,b[\cap \mathbb{Q}$ ce qui achève la démonstration du résultat.

b) On va montrer que tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contient un irrationnel.
Soient a, b deux nombres réels tel que, $a < b$.
On sait, du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, qu'il existe deux rationnels r_1, r_2 tels que

$$a < r_1 < r_2 < b.$$

Or

$$t = r_1 + \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{2}}$$

appartient à $]r_1, r_2[\, \subset \,]a,b[$ et de plus $t \notin \mathbb{Q}$, car sinon, on aura

$$\frac{t - r_1}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

qui est impossible car

$$\frac{t - r_1}{r_1 - r_2} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}.$$

ii) α) *Nous savons que*

$$x^2 < 2 \Longleftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

ce qui montre que $\sqrt{2}$ *est un majorant de* E. *De plus, pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a d'après le résultat préliminaire ci-dessus*

$$\left]\sqrt{2}-\varepsilon, \sqrt{2}+\varepsilon\right[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset,$$

ce qui veut dire que $\sqrt{2}$ *est le plus petit des majorants de* E *dans* $\mathbb{R}$, *(i.e.* $\sup E = \sqrt{2}$ *dans* $\mathbb{R}$*).*
β) *Il s'agit de montrer que* E, *n'admet pas de borne suprérieure dans* $\mathbb{Q}$. *Pour cela, nous supposons le contraire. Soit* $r \in \mathbb{Q}$ *et* $r = \sup E$, *alors* r *est un majorant de* E. *Comme* $r \in \mathbb{R}$ *et* $\sqrt{2}$ *est le plus petit des majorants de* E *dans* $\mathbb{R}$, *alors* $r \geq \sqrt{2}$. *Mais* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *donc* $r > \sqrt{2}$. *Ainsi l'intervalle* $\left]\sqrt{2}, r\right[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. *Donc il existe* $r' \in \mathbb{Q}$ *tel que* $r' > \sqrt{2}$, *donc* r' *est un majorant de* E. *Mais* $r' < r$ *ce qui contredit l'hypothèse que* $r = \sup E$ *dans* $\mathbb{Q}$. *Donc* E *n'admet pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.
γ) *<u>Conclusion :</u> Dans* $\mathbb{Q}$, *une partie bornée et non vide, peut ne pas avoir de borne supérieure (resp. inférieure).*
iii) Il s'agit de montrer que $\overline{A} = \mathbb{R}$, *ce qui est équivaut à*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing.$$

Ce qui est aussi équivalent à dire pour tout x *dans* $\mathbb{R}$ *il existe une suite d'éléments de* A *qui converge vers* x. *Or* x *appartient à* $\mathbb{R}$, *implique qu'il existe* a, b *appartenant à* A *tel que* $a < x < b$. *Donc on a les deux cas suivants :* $x = \frac{a+b}{2}$ *au quel cas* x *appartient à* A, *ou bien* x *appartient à l'un des intervalles* $\left]a, \frac{a+b}{2}\right[$, *ou* $\left]\frac{a+b}{2}, b\right[$. *Notons* $]a_1, b_1[$ *cet intervalle. Il est clair que* a_1, b_1 *appartiennent à* A *et que* $a \leq a_1$, $b_1 \leq b$, $a_1 < x < b_1$, $|x - a_1| < \frac{a+b}{2}$ *et* $|x - b_1| < \frac{a+b}{2}$. *On refait la même chose, donc soit que* $x = \frac{a_1+b_1}{2}$ *au quel cas* x *appartient à* A, *soit que* x *appartient à l'un des intervalles* $\left]a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right[$ *ou bien* $\left]\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right[$. *Notons cet intervalle* $]a_2, b_2[$. *Il est clair que* a_2, b_2 *appartiennent à* A *et que* $a_1 \leq a_2$, $b_2 \leq b_1$, $a_2 < x < b_2$, $|x - a_2| < \frac{a+b}{4}$ *et* $|x - b_2| < \frac{a+b}{4}$. *Ainsi on construit une suite d'intervalles emboités* $[a_n, b_n]$ *qui contiennent tous* x *et dont les extrémités* a_n *et* b_n *appartiennent à* A *vérifient* $|x - a_n| < \frac{a+b}{2^n}$ *et* $|x - b_n| < \frac{a+b}{2^n}$. *Cela veut dire qu'on a construit deux suites adjacentes d'éléments de* A *qui convergent vers la même limite* x.
iv) Il est facile de remarquer que S *est majoré et que* T *est minoré.*

Comme ils sont non vides, alors S admet une borne supérieure α et T admet une borne inférieure γ. Autrement dit

$$\alpha = \sup S \text{ et } \gamma = \inf T.$$

Cela implique que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists s \in S \quad et \quad \exists t \in T : \begin{cases} \alpha - \varepsilon < s \leq \alpha \\ \beta \leq t < \gamma + \varepsilon. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ on a : } \alpha - \varepsilon < \gamma + \varepsilon.$$

Donc on a

$$\alpha \leq \gamma$$

car ε peut être choisi aussi petit que l'on veut.

Montrons plus particulièrement que $\alpha = \gamma$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde et supposer que $\alpha < \gamma$. Dans ce cas, il va exister un nombre $r \in]\alpha, \gamma[$. Cela enraîne que $r \notin S$ car α est le plus petit des majorants de S. Par conséquent $r \in T$ car $S \cup T = \mathbb{R}$, ce qui est absurde car $r < \gamma$ et γ est le plus grand des minorants de T.

On conclut que $\alpha = \gamma$ et c'est le β qu'on cherche.

v) Nous savons que $A \subset A \cup B$ et que $B \subset A \cup B$. Donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Cela montre que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. D'autre part $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ donc $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ qui est un fermé de $\mathbb{R}$ (comme étant la réunion de deux fermés). Or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Il est clair que $A \cap B \subset A$ et que $A \cap B \subset B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. Autrement dit $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Soit x appartenant à $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$, alors x appartient à $\overset{o}{A}$ et x appartient à $\overset{o}{B}$.

Donc

$$\begin{aligned} \exists \alpha &> 0 \text{ tel que }]x - \alpha, x + \alpha[\subset A \text{ et} \\ \exists \beta &> 0 \text{ tel que }]x - \beta, x + \beta[\subset B. \end{aligned}$$

Donc pour $\eta = \frac{1}{2} \inf(\alpha, \beta)$, on a

$$]x - \eta, x + \eta[\subset A \cap B$$

ce qui montre que x *appartient à* $\overset{o}{\widehat{A\cap B}}$. *Pour l'autre inclusion, on a* $A\cap B\subset A$ *et* $A\cap B\subset B$, *donc* $\overset{o}{\widehat{A\cap B}}\subset \overset{o}{A}$ *et* $\overset{o}{\widehat{A\cap B}}\subset \overset{o}{B}$ *ce qui montre que* $\overset{o}{\widehat{A\cap B}}\subset \overset{o}{A}\cap \overset{o}{B}$. $A\subset A\cup B$ *et* $B\subset A\cup B$, *donc* $\overset{o}{A}\subset \overset{o}{\widehat{A\cup B}}$ *et* $\overset{o}{B}\subset \overset{o}{\widehat{A\cup B}}$. *D'où* $\overset{o}{A}\cup \overset{o}{B}\subset \overset{o}{\widehat{A\cup B}}$.
Pour les inclusions strictes, on donne l'exemple suivant
$A =]0,2[$ *et* $B=[2,3]$. *Nous avons dans ce cas* $\overline{A}=[0,2]$, $\overline{B}=[2,3]$, $\overset{o}{A}$ $=]0,2[$ *et* $\overset{o}{B}=]2,3[$. *Donc* $\overline{A\cap B}=\varnothing$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ $=\{2\}$, $\overset{o}{A}\cup\overset{o}{B}=]0,2[\cup]2,3[$ *et* $\overset{o}{\widehat{A\cup B}}=]0,3[$.
vi) Pour A, *le* $\sup$ *est atteint en* 1 *et l'inf est* 0 *car* 0 *est un minorant de* A *et* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.
Pour B, *on a :* $\sup B=2$, *il est atteint donc c'est égale au plus grand élément de* B. *de même* $\inf B=1$ *est aussi atteint, donc c'est égale au plus petit élément de* B.
Pour $E=\left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}/\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$, 0 *est un minorant atteint au point 1. On commence par remarquer que l'application*

$$\varphi:\ \begin{array}{l}\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}\\ n\longmapsto \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}\end{array}$$

est croissante. En effet

$$\begin{aligned}\varphi(n+1)-\varphi(n) &= \frac{n+1-\frac{1}{n+1}}{n+1+\frac{1}{n+1}}-\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}\\ &= \frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}-\frac{n^2-1}{n^2+1}\\ &= \frac{4n-2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}=1$$

et

$$\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}<1\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$\varphi(n)$ est croissante et convergente, donc $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \sup E = 1$. En conclusion, $\sup E = 1$ et E n'admet pas de plus grand élément.
C n'est pas majoré mais admet une borne inférieure. En effet

$$C = \left\{ \frac{-1}{2k} + 8k^2 / k \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ \frac{-1}{2h+1} / h \in \mathbb{N} \right\},$$

donc C n'est pas majoré car

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-1}{2k} + 8k^2 = +\infty$$

et C admet une borne inférieure qui est -1, car

$$\lim_{h\to\infty} \frac{-1}{2h+1} = -1$$

et qui est atteint pour $h = 0$.

De même, D est un ensemble fini et est égal à $\{0,1\}$ car si n est pair, $\frac{(-1^n+1)}{(-1)^n-(-1)^{n+1}} = 1$ et si n est impair, $\frac{(-1^n+1)}{(-1)^n-(-1)^{n+1}} = 0$.
vii)

a) Si on note

$$\inf S = \alpha$$

alors, en utilisant la caracterisation de la borne inférieure on a

$$\begin{cases} \forall x \in S,\ x \geq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y \in S : y - \varepsilon < \alpha \leq y. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \forall x \in S,\ \text{-}x \leq -\alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists y \in S : -y + \varepsilon > -\alpha \geq -y \end{cases}$$

ce qui montre que

$$\inf S = -\alpha = \sup(-S) = \sup T.$$

b) D'abord si $supS = +\infty$ ou bien si $\sup T = +\infty$, alors $\sup(S+T) = +\infty$, car sinon $S+T$ serait une partie majorée, et par suite les parties S et T le seraient également.
Si maintenant il existe deux réels α et β telles que

$$\alpha = \sup S \quad et \quad \beta = \sup T$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (s,t) \in SXT \quad \textit{telles que} \quad \begin{array}{l} \alpha \geq s > \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \\ \beta \geq t > \beta - \frac{\varepsilon}{2} \end{array} .$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists s + t \in S + T \quad \textit{telle que} \quad \alpha + \beta \geq s + t > \alpha + \beta - \varepsilon.$$

Ce qui montre que

$$\alpha + \beta = \sup(S + T).$$

La preuve pour l'inf est analogue à celle là et est laissée au lecteur.

Solution de l'exercice 1.1.2.

A) Pour la question 1), supposons que $G \neq \{0\}$. 0 *n'est pas point d'accumulation de* G*, s'exprime par*

$$\exists r > 0, \quad]-r, r[\cap G^* = \varnothing$$

où $G^* = G \backslash \{0\}$*. Cela voudrait dire aussi que* 0 *ne peut pas être la limite d'une suite injective d'éléments de* G*. Montrons alors que tout point de* G *est isolé. Supposons qu'il existe* $x \in G$ *qui ne soit pas isolé. Cela veut dire que*

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists g_\varepsilon \in G \quad \textit{telle que} \quad g_\varepsilon \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\; \textit{et} \; g_\epsilon \neq x.$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ *(avec* $n \in \mathbb{N}^*$*),* $\exists g_n \in G$ *telle que*

$$-\frac{1}{n} < g_n - x < \frac{1}{n}.$$

Ainsi la suite $(g_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite injective d'éléments de* G *qui converge vers* 0*, ce qui contredit l'hypothèse que* 0 *n'est pas point d'accumulation de* G*. On en déduit que tous les éléments de* G *sont isolés. D'autre part il existe* $r > 0$*, tel que* $]-r, r[\cap G^* = \varnothing$*, cela entraîne que soit* $G = \{0\}$*, soit pour tout* $g \in G$*, on a* $|g| > r$ *(*$|g|$ *désigne la valeur absolue de* g*). Donc* $\inf\limits_{g \in G^*} |g|$ *existe car toute partie non vide minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une une borne inférieure. Soit alors* $a = \inf\limits_{g \in G^*} |g|$*. Notons que* $a > 0$*, ce nombre réel* a *appartient obligatoirement à* G*, car sinon* a *serait limite d'une suite injective* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* G*. Donc la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de terme général*

$$x_n = g_{n+1} - g_n$$

serait une suite d'éléménts de G, *(car* G *est un groupe pour l'addition), qui converge vers* 0, *ce qui est absurde. On en déduit que* $G = a\mathbb{Z}$. *En effet,* $a\mathbb{Z} \subset G$, *d'autre part si* $x \in G$ *et* $x \notin a\mathbb{Z}$, *alors il existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tel que*

$$na < x < (n+1)a,\ n = E(\frac{x}{a})$$

ce qui implique

$$0 < x - na < a \quad et\, x - na \in G$$

ce qui est absurde, car $a = \inf_{q \in G^*} |q|$. *Donc soit que* $G = \{0\}$, *soit que* $G = a\mathbb{Z}$, *et dans ces deux cas* G *est fermé. En effet le singleton* $\{0\}$ *est fermé dans* $\mathbb{R}$. *D'aute part, on peut écrire* $a\mathbb{Z} = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} \{na\}$, *ce qui implique que*

$$\overline{a\mathbb{Z}} = \overline{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} \{na\}} = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} \overline{\{na\}} = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} \{na\} = a\mathbb{Z}.$$

($\overline{a\mathbb{Z}}$ *désigne l'adhérence de* $a\mathbb{Z}$, *c'est une réunion quelconque de fermés, donc c'est un fermé de R).*

2) Nous supposons maintenant que 0 *est point d'accumulation de* G, *donc il est limite d'une suite injective* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* G. *Montrons que dans ce cas,* G *est partout dense dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *il existe un entier naturel* N *à partir du quel tous les* g_n *sont plus petit que* x. *(On peut supposer que la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante). On a donc*

$$A = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid 0 < m\frac{g_n}{x} < 1 \right\}$$

est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$, *donc il admet un plus petit élément, qu'on va noter* m_0 *et qui est non nul. On a alors*

$$m_0 g_n < x \leq (m_0+1)g_n$$

ce qui entraîne que

$$0 < x - m_0 g_n \leq g_n$$

donc on aura

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(x - x_n) \leq \lim_{n\to\infty}(g_n) = 0$$

avec

$$x_n = x - m_0 g_n$$

sachant que $m_0 g_n$ *appartient à* G *car celui ci est un groupe pour l'addition. On en déduit que* x *est limite d'une suite d'éléments de* G *donc que* x *est dans l'adhérence* $\overline{G}$ *de* G. *Par conséquent* G *est partout dense dans*

$\mathbb{R}$. *On en déduit que les seuls sous groupes fermés de* $\mathbb{R}$ *sont* $\mathbb{R}$ *lui même et les sous groupes de la forme* $a\mathbb{Z}$ *(où* $a \in \mathbb{R}^*$*).*
3) Pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$*, il est facile de montrer que* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$*, est un sous groupe de* $\mathbb{R}$*. D'autre part pour montrer qu'il est partout dense dans* $\mathbb{R}$*, il suffit de montrer que* 0 *est un point d'accumulation. Pour cela, on va montrer que :* $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ *est un sous-groupe discret si et seulement si* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$*.*
En effet, si $E = \alpha\mathbb{Z}$ *avec* $\alpha > 0$*, puisque* $E \neq \{0\}$*, alors pour* a *et* b *appartenant à* E*, il existe* $p,\ q \in \mathbb{Z}^*$ *tels que* $a = \alpha b$ *et* $p = \alpha q$ *ce qui implique que,* $\alpha = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ *ce qui entraine donc que* $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$*.*
Réciproquement, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$*, il existe* $p,\ q \in \mathbb{Z}^*$ *premiers entre eux tel que :* $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$*. Posons,* $c = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$*. On a,* $a = cp$ *et* $b = cq$ *ce qui donne* $E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset |c|\mathbb{Z}$*, ce qui montre que* E *est discret, et donc* 0 *est isolé.*
On peut même montrer que : $E = |c|\mathbb{Z}$*. En effet, d'aprés le théorème de Bezout, il existe* $u,\ v$ *appartenent à* $\mathbb{Z}$ *tel que*

$$\begin{aligned} up + vq = 1 &\implies cup + cvq = c \\ &\implies c \in E = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ &\implies |c|\mathbb{Z} \subset E.c \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que les points adhérents sont isolés, soit d'accumulation. Donc 0 *est un point d'accumulation de* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$*, ce qui implique d'après ce qui précède que* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ *est un sous groupe partout dense dans* $\mathbb{R}$*.*
Pour la déduction, on remarque que pour tout x *élément de* $\mathbb{R}$*, il existe une suite* $(n_k + \alpha m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ *qui converge vers* x*. Donc*

$$\begin{aligned} e^{2i\pi x} &= \lim_{k \to \infty} e^{2i\pi(n_k + \alpha m_k)} \\ &= \lim_{k \to \infty} e^{2i\pi\alpha m_k} \end{aligned}$$

car $e^{2i\pi(n_k + \alpha m_k)} = e^{2i\pi n_k} e^{2i\pi\alpha m_k} = e^{2i\pi\alpha m_k}$*. Cela montre que* $e^{2i\pi x}$ *est dans l'adhérence de* $\{e^{2i\pi n\alpha} \mid n \in \mathbb{Z}\}$*. On en déduit que*

$$\overline{\{e^{2i\pi n\alpha} \mid n \in \mathbb{Z}\}} = \mathfrak{C}(\mathfrak{o}, \mathfrak{1}) \quad \textit{i.e. le cercle unité.}$$

B) 1) $E \neq \varnothing$ *car 0 appartient à* E*. D'autre part* E *est majoré par 1 car* $E \subset [0, 1]$*. On en déduit que* $\sup E = T$ *existe car toute partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*
2) Si $a + T(b - a)$ *appartient à* A*, alors*

$$\exists \varepsilon > 0 : [a + T(b - a) - \varepsilon, a + T(b - a) + \varepsilon] \subset A$$

quitte à remplacer ϵ par $\frac{\epsilon}{2}$ car A est un ouvert. Or on peut écrire $\varepsilon = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a}$ car $b \neq a$, donc

$$\left[a + (T - \frac{\varepsilon}{b-a})(b-a), a + (T + \frac{\varepsilon}{b-a})(b-a)\right] \subset A$$

ce qui entraîne que $T + \frac{\varepsilon}{b-a} \in E$ et $T + \frac{\varepsilon}{b-a} > T$ ce qui est absurde.
3) Comme $a+T(b-a)$ n'appartient pas à A, alors $a+T(b-a)$ appartient à B car elle appartient à I qui est un intervalle ($a,\ b \in I$, $T \in [0,1]$ implique que $a(1-T) + Tb \in I$).
4) B est un ouvert, implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, quitte à remplacer ε par $\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left[a + (T - \frac{\varepsilon}{b-a})(b-a), a + (T + \frac{\varepsilon}{b-a})(b-a)\right] \subset B$$

ce qui entraîne que $T - \frac{\varepsilon}{b-a} \notin E$ et $T + \frac{\varepsilon}{b-a} \notin E$, donc $]T - \frac{\varepsilon}{b-a}, T + \frac{\varepsilon}{b-a}[\cap E = \emptyset$ ceci contredit le faite que T est la borne supérieure de E.

C/ i)Comme a est un point d'accumulation de A, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in \left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[\cap A \text{ et } x_n \neq a.$$

On en déduit que tous les x appartenants à $(\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right] \cap A)$ qui sont différents de a sont isolés, et forment une suite dénombrable $\{x_1, x_2, ..., x_n, ..\}$ d'éléments de A. D'autre part les éléments de A qui n'appartiennent pas à $\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$ sont en nombre fini car ils appartiennent à un compact K de $\mathbb{R}$ qui contient A (car tout sous ensemble borné de $\mathbb{R}$ est contenu dans un compact de $\mathbb{R}$). De plus dans un compact, de toute suite infinie, on peut en extraire une sous suite convergente, d'où un autre point d'accumulation de A ce qui contredira l'unicité de a. On en conclut que A est dénombrable.
ii) Il est clair que la limite de la suite $(x_n)_n$ est a.

D) 1) Du faite que $\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$ et que $\{a\}$ et $\{b\}$ sont deux fermés non vides disjoints, $\{a,\ b\}$ n'est pas connexe.
2) La fonction $\frac{f}{g}$ est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$. De plus $\frac{f}{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme rapport de deux fonctions continues non nulles sur $\mathbb{R}$. Ce qui entraine que $\frac{f}{g}(\mathbb{R})$ est un connexe puisque l'image d'un connexe

par une application continue est un connexe. Par ailleurs $f^2(t) = g^2(t)$. *Il s'en suit que* $\frac{f}{g}(t) \in \{-1,\ 1\}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Il en résulte, du faite que* $\{-1,\ 1\}$ *n'est pas connexe que* $\frac{f}{g}(\mathbb{R})$ *est soit égale à* $\{1\}$ *soit égale* $\{-1\}$. *Et comme* $\frac{f}{g}(0) = 1$, *alors* $\frac{f}{g}(\mathbb{R}) = \{1\}$ *c'est-à-dire que* $f(t) = g(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

E) 1) L'application $f : A \longrightarrow B$ *est un homéomorphisme c'est-à-dire que* f *est bijective et bicontinue (ie* f *et* f^{-1} *sont continues).*
2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0,\ 1[$ *qui à* x *fait correspondre* $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. *Nous avons pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $f^{'}(x) = \frac{e^x}{e^x+1} > 0$. *Donc* f *est continue et est stictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *De plus* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. *Ainsi par le Théorème des valeurs intermédianres* f *est une bijection bicontinue sur* $\mathbb{R}$ *dans* $]0,\ 1[$. *D'autre part sa réciproque est* $f^{-1} :]0,\ 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *qui à* y *fait correspondre* $f^{-1}(y) = x = ln(\frac{y}{1-y})$ *pour tout* $y \in]0,\ 1[$. *Il est bien clair que* $f^{-1} : y \longrightarrow ln(\frac{y}{1-y})$ *est continue.*

F) i) Les points isolés d'un ensemble forment un ensemble fermé ?

La réponse est négative et comme contre exemple, on propose l'ensemble

$$S = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tous les points de S *sont isolés, mais*

$$\overline{S} = S \cup \{0\}$$

ce qui montre que S *n'est pas fermé.*
ii) Ces trois propositions sont fausses. En effet pour b) *et* c) *il suffit de prendre* $S = \mathbb{Q}$.

Pour a) on va prendre $S = [0, 1]$ *et* $T = \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right[$. *Alors*
$\delta(S \cup T) = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$, $\delta S = \{0, 1\}$ *et* $\delta T = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

Solution de l'exercice 1.1.3. *i)* $D_f = \mathbb{R}$, *ii)* $D_g =]-2, 0]$, *iii)* $D_h = \mathbb{R}$, *iv)* $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, *v)* $D_p =]-\infty, -6] \cup [1, +\infty[$,
vi) On doit avoir

$$f(x)^2 = \ln(x) \quad et \quad x > 0$$

ce qui implique que

$$f(x) = \sqrt{\ln(x)} \quad et \quad x \geq 1.$$

Donc, $D_f = [1, +\infty[\,.$

vii) a) $fog(x) = \frac{1}{1-\cos^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$. *Ce qui nécessite que* $\sin^2(x)$ *soit non nul. D'où*

$$D_{fog} = \mathbb{R}\diagdown\{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

D'autre part, ona $gof(x) = \cos(\frac{1}{1-x^2})$. *Ce qui nécessite que* $1 - x^2$ *soit non nul. D'où*

$$D_{gof} = \mathbb{R}\diagdown\{-1, +1\}\,.$$

b) $fog(x) = \sqrt{\sin(2x)}$, *ce qui impose* $\sin(2x) \geq 0$ *ce qui est équivaut à*

$$\begin{array}{rcl} x & \in & [0, \pi/2] + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N}) \\ & & \textit{ou bien} \\ x & \in & [-\pi, -\pi/2] - 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N}). \end{array}$$

On en déduit que

$$D_{fog} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [2k\pi, 2k\pi + \pi/2] \cup [-2k\pi, -2k\pi - \pi/2]\,.$$

D'autre part, on a $gof(x) = \sin(2\sqrt{x})$ *ce qui entraîne que*

$$D_{gof} = \mathbb{R}^+.$$

Solution de l'exercice 1.1.4. *1) Pour* $a > 0$, *la suite* $n \longmapsto a^n$ *est une suite géométrique de raison supérieure strictement à* 1. *Donc elle est divergente. De plus*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = 0$$

donc la suite $(u_n)_n$ *de terme général*

$$u_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} + a^n$$

est divergente et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

2) Montrons que si a *est un nombre réel compris entre* 0 *et* 1, *alors la suite* $(u_n)_n$ *est décroissante. En effet*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{3n+4}\left(\frac{1}{3n+7} - \frac{1}{3n+1}\right) + a^n(a-1).$$

On remarque que $a - 1$ *est négatif strictement, et qu'il en est de même pour* $\frac{1}{3n+7} - \frac{1}{3n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *On en conclut que* $u_{n+1} - u_n < 0$ *(car* $\frac{3}{3n+4}$ *et*

a^n sont positifs). Enfin notre suite est bien decroissante.
3) On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} + a^n \\ &= \frac{3n+4-(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)} + a^n \\ &= \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} + a^n \end{aligned}$$

donc

$$u_n = \frac{A}{3n+1} - \frac{B}{3n+4} + a^n$$

avec $A = 1$ et $B = -1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \\ &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} + 1 + a + a^2 + ... + a^n \end{aligned}$$

cela veut dire après simplification que

$$S_n = 1 - \frac{1}{3n+4} + \sum_{k=0}^{n} a^k$$

soit encore

$$S_n = 1 - \frac{1}{3n+4} + \frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

d'où
4) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{1-a}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

Solution de l'exercice 1.1.5. *A)1) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2, on a*

$$1 \leq k-1 < k \Longrightarrow \frac{1}{k} < \frac{1}{k-1} \leq 1$$

ce qui entraîne que

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}.$$

De plus, on a

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

2) On a $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ *ce qui entraîne que*

$$u_n < 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$$

donc en tenant compte des termes qui se simplifient, il reste

$$u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

3) Il est clair que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. *Ce qui veut dire que la suite est croissante. Par conséquent, cette suite est convergente (puisque elle est à la fois croissante et majorée).*

B) Le plus petit terme de la somme s_n *est le dernier c'est-à-dire* $\frac{n}{n^2+n}$ *et son plus grand terme est le premier c'est-à-dire* $\frac{n}{n^2+1}$. *On en déduit l'encadrement suivant*

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1} \quad (\forall k = 1, 2, ..., n)$$

ce qui entraîne que

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq s_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Or les deux membres de gauche et de droite tendent vers 1 *quand* n *tend vers l'infini. Donc la suite* $(s_n)_n$ *est convergente et converge vers* 1.

C) Pour $n = 2$, *nous avons*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} k &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

et

$$\frac{2.3}{2} = 3,$$

la formule est donc vérifiée pour $n = 2$. *Supposons qu'elle est vraie pour* *n (i.e.* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$*) et montrons qu'elle reste vraie pour* $n+1$*. En effet*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= (n+1)(\frac{n}{2}+1)\\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la première assertion. On peut aussi voir que,

1	$+2$	$+....+$	$+(n-1)$	$+n$	$= S_n$
$+n$	$+(n-1)$	$+....+$	$+2$	1	$= S_n$
$n+1$	$n+1$	$....$	$n+1$	$n+1$	$2S_n$

ce qui donne $2S_n = n(n+1)$*, d'où* $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrons maintenant que la formule de la somme des carrés des n *premiers entiers naturels, est aussi vérifiée. Pour* $n = 2$*, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2} k^2 &= 1^2 + 2^2\\ &= 1+4\\ &= 5\end{aligned}$$

et

$$\frac{2.3.5}{6} = 5,$$

ce qui montre que la formule est vérifiée pour $n = 2$*. Suppsons qu'elle* *reste valable jusqu'à n, et montre la pour $n+1$. En effet*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1)(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)) \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Ceci va nous permettre, par le calcul suivant d'en déduire la valeur de la somme

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} p &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}[(\sum_{k=1}^{n} k) + (\sum_{k=1}^{n} k^2)] \\
&= \frac{1}{2}[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}] \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 1.1.6. *1) La suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente définie par la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$$

est positive sur $\mathbb{R}$. De plus $u_1 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ qui est soit plus petit que a si a est supérieur strictement à 0, soit plus grand que a, si a est strictement inférieur à 0. Le cas $a = 0$, donne une suite constante égale à 0. Donc, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $(u_n)_n$ est une suite décroissante si $a > 0$ et $(u_n)_n$ est une suite croissante si $a < 0$. Elle est nulle si $a = 0$. D'autre part, on a

$$-1 \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_n$ est convergente quelque soit la valeur de a, car elle est soit croissante majorée ($a < 0$), soit décroissante minorée ($a > 0$), soit constante et tous les termes sont nuls.
2) Dans cette deuxième question, on a

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2} \\ &= \frac{1+u_{n-1}^2}{u_{n-1}^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3) On en déduit que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = 1,$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k &= \frac{1}{n}[(\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_0^2}) + (\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{u_1^2}) + ... + (\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2})] \\ &= \frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}) \\ &= \frac{1}{n}(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{a^2}). \end{aligned}$$

Donc en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{u_n^2} = 1$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} nu_n^2 = 1.$$

Solution de l'exercice 1.1.7. *1) Montrons que si les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l, alors il en est de même pour la suite $(u_n)_n$. En effet, on a par hypothèse*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \textit{telle que } 2n > N_1 \Longrightarrow |u_{2n} - l| < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \textit{telle que } 2n+1 > N_2 \Longrightarrow |u_{2n+1} - l| < \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$ *alors, il existe pour tout* $m > N$, *un entier naturel* n *tels que*

$m = 2n > N > N_1$ *alors* $|u_m - l| < \varepsilon$, *sinon* $m = 2n+1 > N > N_2$ *alors* $|u_m - l| < \varepsilon$, *ce qui montre que la suite* $(u_n)_n$ *est convergente et converge vers la limite* l.

2) $(u_n)_n$ *est une suite récurrente, définie par la fonction* f

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to 2 + \frac{3}{2+x} \end{array}.$$

Le domaine de définition de f *est* $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$. *D'autre part, par récurrence sur* n, *on a* $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *En effet, on a* $u_0 = \frac{7}{2} > 0$. *Supposons que c'est vrai jusqu'à l'ordre* n, *et vérifions que c'est encore vrai pour* $n+1$. *Mais* $u_n > 0$ *implique que*

$$2 + \frac{3}{2 + u_n} > 0$$

ce qui veut dire que $u_{n+1} > 0$. *On en déduit que* $u_n \in D_f$ *pour tout* n *appartenant à* $\mathbb{N}$, *et donc* $(u_n)_n$ *est bien définie.*

3) Pour la monotonie, on étudie le signe de la différence

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 + \frac{3}{2 + u_n} - u_n \\ &= \frac{7 - (u_n)^2}{2 + u_n}. \end{aligned}$$

Cette expression ne nous permet pas de donner le signe exactement. C'est pourquoi, nous allons calculer les quatre premiers termes de la suite : $u_0 = \frac{7}{2}$, $u_1 = \frac{28}{11}$, $u_2 = \frac{133}{50}$, $u_3 = \frac{616}{233}$. *Ainsi, on vérifie que*

$$u_1 < u_3 < u_2 < u_0.$$

4) On va donc étudier les deux sous-suites extraitent : $v_n = u_{2n}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$. *Ces deux sous-suites sont définies par la fonction* fof *(qui est croissante) car* $v_{n+1} = fof(v_n)$ *et* $w_{n+1} = fof(w_n)$. *Il suffit donc de comparer* v_0 *avec* v_1 *et* w_0 *avec* w_1. *Mais d'après ce qui précède, on a*

$$v_0 = \frac{7}{2} > \frac{133}{50} = v_1$$

et

$$w_0 = \frac{28}{11} < \frac{616}{233} = w_1.$$

On conclut que (v_n) *est décroissante et que* (w_n) *est croissante. Comme* (v_n) *est minorée par* $\frac{28}{11}$ *et* (w_n) *est majorée par* $\frac{7}{2}$*, alors elles sont toutes les deux convergentes. Soit* l_1 *(resp.* l_2*) la limite de* (v_n) *(resp. de* (w_n)*), alors ces deux limites sont solutions de l'équation*

$$fof(x) = x$$

ce qui est équivaut à

$$\frac{28+11x}{11+4x} = x$$

ou encore que

$$x^2 = 7.$$

En remarquant que tous les termes de la suite (U_n) *sont positif, la solution à retenir est*

$$l_1 = l_2 = \sqrt{7}.$$

5) D'après 1), on déduit que la suite (u_n) *est convergente et que sa limite est* $\sqrt{7}$*.*

Solution de l'exercice 1.1.8. *Les trois suites à étudier dans cet exercice sont récurrentes. La première est définie par son premier terme* $u_0 = 1$ *et la relation* $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$*. Or le domaine de définition de la fonction* $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ *est l'intervalle* $]-1,+\infty[$*. D'autre part, la dérivée*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in\,]-1,+\infty[$$

donc f *est strictement croissante sur* $]-1,+\infty[$*, car sa dérivée est strictement positive. En revenant à la suite, on remarque que* $u_1 = \ln(2)$*, est plus petit que* $u_0 = 1$ *et de plus* u_n *est bien dédinit car* $f(]-1,+\infty[=\,]0,\infty[\subset]-1,+\infty[$ *. Donc la suite est décroissante car* f *est croissante et* $u_1 < u_0$*. D'autre part cette suite est minorée par* 0*, donc elle est convergente.*

La deuxième suite est définie par son premier terme $u_0 = 2$ *et la relation* $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$*. Elle est récurrente définie par la fonction* $f : x \longmapsto 1 + \frac{1}{x}$ *dont le domaine de définition est* $D_f = \mathbb{R}^*$*. Cette fonction* f *est strictement décroissante sur* R_*^+ *et sur* R_*^-*, car sa dérivée est*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

On va étudier les sous suites $v_n = u_{2n}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$ *pour tout* n *entier naturel. Ces deux sous suites sont récurrentes définies par la fonction*

fof qui est strictement croissante. On va alors comparer v_1 avec v_0 et w_1 avec w_0. En effet, on a

$$w_0 = u_1 = \frac{3}{2} < \frac{8}{5} = w_1 < v_1 = u_2 = \frac{5}{3} < 2 = v_0 = u_0.$$

Ce qui est suffisant pour déduire que la sous suite $(v_n)_n$, (resp. $(w_n)_n$) est décroissante (resp. croissante) minorée par $\frac{3}{2}$ (resp. majorée par 2). Donc d'après l'Exercice 0.0.7, la suite $(u_n)_n$ est convergente et converge vers la même limite l qui est la limite commune de $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$. Remarque : La limite l des suites v_n et w_n est solution de l'équation

$$\frac{1+2x}{1+x} = x.$$

La limite à retenir est donc à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car $v_n \geq 0$, $w_n \geq 0$ pour tout n. La troisième suite est définie par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation $u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{u_n+2}$. Elle est récurrente définie par la fonction $f : x \longmapsto \frac{\exp(x)}{x+2}$ dont le domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Cette fonction f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et est strictement décroissante sur $]-\infty, -1] \setminus \{-2\}$ car sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{(x+1)\exp(x)}{(x+2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}.$$

D'autre part on a

$$u_1 = \frac{2\sqrt{e}}{5} > \frac{1}{2} = u_0$$

car

$$e > \frac{25}{16} .$$

On en déduit que la suite $(u_n)_n$ est croissante. Par application du théorme des valeurs intermediares il existe $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = l$. De plus $u_n \leq l$ pour tout entier naturel n donc u_n est convergente vers une limite l verifiant $f(l) = l$ et $l \in [0,1]$.

Solution de l'exercice 1.1.9. *On peut vérifier facilement, par récurence que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $-u_n \leq 0$, par suite $e^{-u_n} \leq e^0 = 1$ pour tout $n \geq 1$ d'où $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Comme la suite $\frac{1}{n+1}$ converge vers 0, donc la suite u_n converge vers 0.*

Solution de l'exercice 1.1.10. *A) Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)}$ *(resp.* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)}$*) n'est pas nécessairement égale à 1. En effet, si on prend :*

$u_n = n$ *et* $v_n = n+1$*, alors on a bien :* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$*, mais*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n.e} \\ &= \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 \right| &= \left| \frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \right| \\ &= \left| \frac{\ln(\frac{u_n}{v_n})}{\ln(v_n)} \right| \end{aligned}$$

dont la limite est égale à 0 *car la fonction logarithme est continue au point* 1 *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$*.*

B) On commence par remarquer que $u_0 = a > 0$*,* $v_0 = \frac{a}{u_0} = 1$*,* $u_1 = \frac{a+1}{2}$ *et* $v_1 = \frac{2a}{a+1}$*. On a aussi*

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n}$$

et

$$v_{n+1} = \frac{a}{u_{n+1}} = \frac{2av_n}{a + v_n^2}.$$

Ces deux suites sont récurrentes et sont définies respectivement par les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$$

et

$$g(x) = \frac{2ax}{a + x^2} \ .$$

D'autre part, $u_1 - u_0 = \frac{a+1}{2} - a = \frac{1-a}{2}$*, dont le signe dépend de la valeur de* a*. En effet, nous avons trois cas possibles :*

1°er cas : $a = 1$*, au quel cas* $u_n = v_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *;*

2°ème cas : $a > 1$*, au quel cas* $f(1) = \frac{1+a}{2} > \sqrt{a}$*. De plus le tableau de variation de* f*, où* $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{2x^2}$ *est*

x	1		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1+a}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Il est facile de montrer par récurrence sur n *que* $u_n > \sqrt{a}$*. Puis comme la fonction* f *est strictement croissante sur l'intervalle* $[a, +\infty[$ *et comme on a :* $\sqrt{a} < u_1 < u_0$*, alors la suite* $(u_n)_n$ *est strictement décroissante. D'autre part le tableau de variation de* g*, où* $g'(x) = \frac{2a(a-x^2)}{(a^2+x^2)^2}$ *est*

x	1		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{2a}{a+1}$	$\nearrow$	$\sqrt{a}$	$\searrow$	0

et on a d'une part $g(1) = \frac{2a}{1+a} < \sqrt{a}$ *, d'autre part :*
$1 = v_0 < v_1 < \sqrt{a}$*. Mais comme la fonction* g *est strictement croissante sur l'intervalle* $[1, \sqrt{a}]$*, alors la suite* $(v_n)_n$ *est strictement croissante. Enfin la suite* $(u_n)_n$ *(resp.* $(v_n)_n$*) est minorée (resp. majorée) par* $\sqrt{a}$*, donc les deux suites sont convergentes. Leur limite commune est* $\sqrt{a}$ *qui est solution des équations*

$$\left\{ \begin{array}{c} f(l) = l, \ si\ l \geq \sqrt{q} \\ g(l) = l, \ si\ 0 \leq l \geq \sqrt{q} \end{array} \right. .$$

On conclut que ces deux suites sont adjacentes car

$$\left\{ \begin{array}{c} (u_n)_n \text{ est croissante et } (v_n)_n \text{ est décroissante} \\ \lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{array} \right. .$$

3°ème cas : $0 < a < 1$ *au quel cas on a :* $0 < a < \sqrt{a} < 1$*. D'où*

$$u_0 = a < \sqrt{a} < \frac{a+1}{2} = u_1$$

On a $u_1 > \sqrt{a}$ *et* $u_n > \sqrt{a}$ *pour tout* $n \geq 1$*, car* $f([\sqrt{a}, +\infty[) \subset [\sqrt{a}, +\infty[)$ *puisque* $f(x) - x \leq 0$ *sur* $[\sqrt{a}, +\infty[)$ *et donc,* u_n *est minorée donc convergente vers* $l = \sqrt{a}$*. On a* $v_1 \in [0, \sqrt{a}]$ *et* $v_n \in [0, \sqrt{a}]$ *pour*

tout $n \geq 1$ *car* $g([0,\sqrt{a}]) \subseteq [0,\sqrt{a}]$, *du fait que* $g(x) - x \geq 0$ *sur* $[0,\sqrt{a}]$ *donc* v_n *converge vers* $\sqrt{a}$. *Et, les suites sont encore adjacentes.*
C) On peut écrire

$$\lim_{n\to\infty}(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = \lim_{n\to\infty}[(u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 + \frac{3}{4}v_n^2] = 0$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 = \lim_{n\to\infty} v_n^2 = 0.$$

Car,

$$0 \leq (u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 \leq (u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 + \frac{3}{4}v_n^2.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty}(u_n + \frac{1}{2}v_n) = 0$$

par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad .$$

Solution de l'exercice 1.1.11. *A) i)*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x+x^3} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\sin(\frac{1}{x})}{1+x^2} = 0.$$

Car $0 \leq \left|x\sin(\frac{1}{x})\right| \leq |x|$.
ii) On utilise l'identité suivante

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(2+x)^3 - 2^3}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{[(x+2)-2][(x+2)^2+2(x+2)+4]}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}(x+2)^2 + 2(x+2) + 4 \\
&= 12.
\end{aligned}$$

iii) Remplaçons $\frac{1}{x}$ *par* X, *on obtient* $\lim_{X\to+\infty}(1+X)^{\frac{-1}{X}}$ *au lieu de* $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^{-x}$. *Or*

$$\begin{aligned}
\lim_{X\to+\infty}(1+X)^{\frac{-1}{X}} &= \lim_{X\to+\infty}\exp(-\frac{\ln(1+X)}{X}) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

car $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = 0$.
iv)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x} &= \lim_{x\to+\infty}\exp(-x\ln(1+\frac{1}{x}))\\ &= e^{-1},\end{aligned}$$

car $\ln(1+\frac{1}{x})$ *est équivalente à* $\frac{1}{x}$ *quand* x *est assez grand et par suite* $-x\ln(1+\frac{1}{x})$ *est équivalente à* -1.
v) Multiplions par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{(x^2-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}\\ &= 0\end{aligned}$$

car le numérateur vaut 1 *et le dénominateur tend vers l'infini quand* x *tend vers* $+\infty$, *puisque*

$$(x^2-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1}) = x(x-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}).$$

vi)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x} &= \lim_{x\to-\infty}\exp(-x\ln(1+\frac{1}{x}))\\ &= e^{-1},\end{aligned}$$

car en $-\infty$, $-x\ln(1+\frac{1}{x})$ *est équivalente à* -1.
B) i) On écrit f *sous la forme*

$$f(x) = \frac{(x-3)(x^2+a-1)}{(x-1)(x-3)}.$$

Donc pour $x\neq 3$, *on aura* $f(x) = \frac{x^2+a-1}{x-1}$ *ce qui entraîne que*

$$\lim_{x\to 3 \text{ et } x\neq 3} f(x) = \frac{8+a}{2}.$$

D'autre part on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ .$$

Si maintenant $a > 0$*, alors* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ *et si* $a < 0$*, alors* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$*.*

ii) Nous allons utiliser dans cet exercice le développement limité. Nous rappelons qu'au voisinage de zéro : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$*, donc*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0 \text{ et } x\neq 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right)\right] &= \lim_{x\to 0 \text{ et } x\neq 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{1-\frac{x^2}{2}} + 1 - \frac{x^2}{2} - 3\right)\right]\\ &= \lim_{x\to 0 \text{ et } x\neq 0}\left[\frac{2+x^2}{2(2-x^2)}\right]\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{\sqrt{x+2}-1}\\ &= \frac{(\sqrt[6]{x+2}-1)(\sqrt[6]{x+2}+1)}{(\sqrt[6]{x+2}-1)(\sqrt[6]{x+2}^2+\sqrt[6]{x+2}+1)}\\ &= \frac{\sqrt[6]{x+2}+1}{\sqrt[6]{x+2}^2+\sqrt[6]{x+2}+1}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{2}{3}.$$

D'autre part au voisinage de $+\infty$*, on a*

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{6}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

C) Pour la fonction f*, on a*

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+4)}$$

donc son domaine de définition est $D_f =]-\infty, -4[\cup]-4, -1[\cup]-1, +\infty[$ *et donc*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to-4^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{1}{3}.$$

Pour la fonction g*, on a* $D_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$*, puisque*

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

D'autre part on a :

$$\lim_{x\to-1^-} g(x) = 2 \text{ et } \lim_{x\to-1^+} g(x) = 2$$

et pour la limite en $+\infty$*,* $g(x) = x(-2 - \sqrt{3(1 - \frac{1}{x^2})})$ *et par suite on a :*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Enfin, pour la fonction h *le domaine de définition est le suivant :* $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x + \frac{1}{x} > 0\right\} =]0, +\infty[$*. Pour les limites aux bords, on trouve* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$*. Pour calculer la limite en 0, il suffit d'écrire*

$$h(x) = x\ln(1 + x^2) - x\ln(x)$$

ce qui implique que

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = 0$$

car $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$*.*

Solution de l'exercice 1.1.12.

i) Le domaine de définition de la fonction f *est* $\mathbb{R}^*$*. D'autre part* f *est continue sur son domaine de définition car elle apparait comme le produit et la composée de fonctions continues sur* $\mathbb{R}^*$*. En effet : notons* $f_1 : x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$*,* $f_2 : x \longmapsto e^x$ *et* $f_3 : x \longmapsto \frac{|x|}{x}$*. D'une part, on a l'égalité fonctionnelle suivante*

$$f = f_3 o (f_2 o f_1)$$

d'autre part f_1, f_2 et f_3 sont continues sur $\mathbb{R}^*$. Pour le prolongement par continuité, on va calculer la limite en 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}e^{-(1/x^2)} = 0$$

car $e^{-(1/x^2)}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, donc f est prolongeable par continuité en 0.
ii) La fonction g est continue sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ (resp. sur $\left]-\infty,\frac{1}{2(1-e)}\right[\cup\left]\frac{1}{2(1-e)},\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$) car elle est constante sur $[0,\frac{1}{2}]$ (resp. elle est le quotient, la somme et la composée de fonctions continues sur $\left]-\infty,\frac{1}{2(1-e)}\right[\cup\left]\frac{1}{2(1-e)},\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$). Au point $\frac{1}{2(1-e)}$ on a :

$$\lim_{x\to \frac{1}{2(1-e)}^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2(1-e)}^-} g(x) = -\infty$$

Et, en 0, on a

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-\ln(1-\frac{1}{2x})} = 0$$

car $\lim_{x\to 0^-}\ln(1-\frac{1}{2x}) = +\infty$. Puis à droite de $\frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{1}{1-\ln(1-\frac{1}{2x})} = 0$$

car si on pose $x=\frac{1}{2}+h$ avec $h>0$, alors $1-\frac{1}{2x}=\frac{2h}{1+2h}$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0^+. Donc $\ln(\frac{2h}{1+2h})$ tend vers $-\infty$. On en conclut que g est prolongeable par continuité en 0 et en $\frac{1}{2}$.
iii) Dans ce cas la fonction $h_1 : x\longmapsto e^x+1$ (resp. $h_2 : x\longmapsto \frac{2}{1+\exp(-\frac{1}{x})}$) est continue sur $]-\infty,0]$ (resp. sur $]0,+\infty[$). Il reste à voir si les deux limites à droite et à gauche de 0 sont égales ou non ?

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x+1 = 2.$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+\exp(-\frac{1}{x})} = 2$$

car $\exp(-\frac{1}{x})$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. Donc h est prolongeable par continuité en zéro.

Solution de l'exercice 1.1.13.
i) On considère la fonction $f : x \longmapsto xe^x - 2e$. *C'est une fonction continue sur* $[-1, 2]$. *De plus on a*

$$f(-1) = -\frac{1}{e} - 2e$$

qui est négatif et on a

$$f(2) = 2e^2 - 2e$$

qui est poisitif. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f *sur* $[-1, 2]$, *il existe* $x \in]-1, 2[$ *tel que* $f(x) = 0$.
ii) Le polynôme $P(X) = X^3 - X + 1$, *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$. *De plus on a*

$$\lim_{X \to +\infty} P(X) = +\infty$$

et

$$\lim_{X \to -\infty} P(X) = -\infty.$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à P *sur* $\mathbb{R}$, *l'équation* $P(X) = 0$ *admet au moins une solution dans* $\mathbb{R}$. *Cela veut dire que* P *admet au moins une racine réelle.*
iii) On considère ici la fonction

$$f(x) = 2 + \ln(x).$$

On rappelle que a *est un point fixe de* f *si, et seulement si,* $f(a) = a$. *Pour montrer l'existence de* a, *on va introduire une nouvelle fonction*

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x \\ &= 2 + \ln(x) - x. \end{aligned}$$

Il est clair que : $D_g = D_f =]0, +\infty[$ *et que* g *est continue sur* D_g *qui contient* $[1, e^2]$. *D'autre part, on a*

$$g(1) = 1$$

qui est positif et on a

$$g(e^2) = 2 + 2 - e^2$$

qui est négatif. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g *sur l'intervalle* $[1, e^2]$, *il existe* $a \in]1, e^2[$ *telle que* $g(a) = 0$. *Ce qui veut dire que*

$$f(a) = a.$$

Solution de l'exercice 1.1.14. *La fonction f serait continue en $-1/2$ si chaque fois qu'on se donne un ε strictement positif, on serait en mesure de trouver un η strictement positif tel que $|x-(-1/2)|<\eta \Longrightarrow |f(x)-f(-1/2)|<\varepsilon$. Or ici, il est facile de remarquer que*

$$\left|\sin(\frac{1}{2x+1})\right| \leq 1$$

donc

$$\left|(2x+1)\sin(\frac{1}{2x+1})\right| \leq |(2x+1)|\,.$$

D'autre part

$$|x-(-1/2)|<\eta \Longleftrightarrow |(2x+1)|<2\eta,$$

donc, il suffit de prendre $0<\eta<\varepsilon/2$ pour avoir l'implication ci dessus.

Solution de l'exercice 1.1.15. *Il faut d'abord remarquer que cette fonction n'est pas définie en $x=\frac{1}{2(1-e)}$, car l'équation $1-\ln(1-\frac{1}{2x})=0$, admet pour solution $x=\frac{1}{2(1-e)}<0$. Donc son domaine de définition est $D_g=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2(1-e)}\right\}$. Pour la continuité de g, on a g est constante sur $[0,1/2]$ donc continue sur cet intervalle. Examinons maintenant la continuité sur $D_g\backslash[0,1/2]$. La fonction $x\longmapsto\ln(1-\frac{1}{2x})$ est continue sur ce domaine car elle s'écrit comme la somme, le produit et la composée de fonctions continue sur ce même domaine. Donc, g est continue sur $D_g\backslash[0,1/2]$.*
Nous allons maintenant examiner la continuité en 0. On a
$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-\ln(1-\frac{1}{2x})}=0$ *car* $-\frac{1}{2x}\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}+\infty$.
On en déduit que g est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.
Pour la continuité en $\frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to(1/2)^+}g(x)=0$ car $1-\frac{1}{2x}$ tend vers 0 quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs positives ce qui implique la continuité de g en 1/2 car

$$\lim_{x\to(1/2)^+}g(x)=g(1/2)=\lim_{x\to(1/2)^-}g(x)=0.$$

Solution de l'exercice 1.1.16. *On va utiliser le théorème des valeurs intermédiaires qu' on note en abréviation (T.V.I). Par hypothèse, on a*

$$\forall A>0,\ \exists M>0 \text{ tels que } x>M \Longrightarrow f(x)>A$$

ce qui exprime que la limite de f est $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, et on a de même

$$\forall B > 0,\ \exists N > 0 \text{ tels que } x < -N \Longrightarrow f(x) < -B$$

ce qui exprime que la limite de f au voisinage de $-\infty$ est $-\infty$. Choisissons $a < -N$ et $b > M$. f est continue sur $[a, b]$ et on a $f(a)f(b) < 0$. Donc d'après le (T.V.I) appliqué à f sur $[a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ telle que $f(c) = 0$. On en déduit que c est solution de l'équation $f(x) = 0$. Maintenant si P est un polynôme de degré impair, alors P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :
$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = signe(a_{2n+1})(+\infty)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = signe(a_{2n+1})(-\infty)$ *lorsque,* $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + ... + a_0$.
Donc d'après la question précèdente, l'équation $P(X) = 0$ admet une solution. Toutefois, il faut noter que cette solution n'est pas nécessairement unique. Prendre par exemple $P(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ qui est un polynôme de degré 3 et qui admet trois racines réelles.

Solution de l'exercice 1.1.17. *On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x notée $E(x)$ est l'unique entier relatif $n = E(x)$ vérifiant*

$$n \leq x < n + 1.$$

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = xE(1/x)$ est $\mathbb{R}^*$. D'autre part, on a pour tout $x > 1$

$$0 < \frac{1}{x} < 1 \Longrightarrow E(\frac{1}{x}) = 0$$

ce qui implique que

$$f(x) = xE(\frac{1}{x}) = 0.$$

Donc la fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction constante égale à 0. D'autre part pour tout $-\infty \leq x < -1$, on a

$$-1 \leq \frac{1}{x} < 0 \Longrightarrow E(\frac{1}{x}) = -1$$

donc $f(x) = -x$ qui est continue sur $]-\infty, -1]$. Pour étudier la continuité de f sur l'intervalle $]0, 1]$, on commence par remarquer que

$$]0, 1] = \bigcup_{n>0} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$$

et que pour tout $x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, *on a*

$$E(\frac{1}{x}) = n \Longrightarrow f(x) = xE(\frac{1}{x}) = nx.$$

On en déduit que f *est continue sur* $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, *mais* f *n'est pas continue en* $\frac{1}{n}$ *car* $f(\frac{1}{n}) = 1$ *pour tout* n *appartenant à* $\mathbb{N}^*$ *et*

$$\lim_{x \to (\frac{1}{n})^+} f(x) = \frac{n-1}{n}.$$

De même on a

$$[-1, 0[= \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0\},\, n \leq -2} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

et pour tout $x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-1, 0\})$, *on a*

$$E(\frac{1}{x}) = n \Longrightarrow f(x) = nx.$$

On en déduit que la fonction f *est continue sur* $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\})$, *mais la fonction n'est pas continue en* $\frac{1}{n}$ *car* $f(\frac{1}{n}) = 1$ $(\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\})$ *et* $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{n})^+} f(x) = \frac{n-1}{n}$. *Enfin, on a* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, *donc* f *est prolongeable par continuité en* 0. *En conclusion la fonction* f, *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ *donc, elle est prolongeable par continuité en* 0.

Pour la fonction g, *on a*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

et

$$\lim_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x} = 0$$

et donc g *est prolongeable par continuité en* 0.

Nous passons à la fonction h, *qui est clairement non prolongeable par continuité en* 0 *car*

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

qui est égale $+\infty$, *ou* $-\infty$ *suivant que* x *tend vers* 0^+ *ou* 0^-.

Solution de l'exercice 1.1.18.

i/ On commence d'abord par calculer le signe de la différence $f(x) - f(y)$ *quand* x *et* y *appartiennent à* $[0,1]$. *On a*

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \\ &= \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}. \end{aligned}$$

Supposons que $0 < x < y < 1$, *alors* $(1 - xy) > 0$ *ce qui implique que*

$$f(x) < f(y).$$

Donc la fonction f *est strictement croissante sur l'intervalle* $[0,1]$.
ii/ Comme f *est continue sur* $[0,1]$, *alors* f *est une bijection car toute fonction continue et strictement monotone est une bijection. D'autre part, il est clair que* $f(0) = 0$ *et que* $f(1) = 1/2$. *Donc la fonction réciproque de* f *notée* f^{-1} *est définie de* $[0,1/2]$ *dans* $[0,1]$, *et on a pour tout* $y \in [0,1/2]$, $f^{-1}(y) = x$ *avec* $x \in [0,1]$ *si, et seulement si,*

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

donc

$$yx^2 - x + y = 0.$$

C'est une équation de second degré en x, *dont le discriminant est*

$$1 - 4y^2 \geq 0 \text{ car } 0 \leq y \leq 1/2.$$

D'où les solutions de l'équation sont

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4y^2}}{2y} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Mais, nous avons pour tout $y \in [0,1/2]$

$$1 \leq 1 + \sqrt{1-4y^2} \leq 2$$

et

$$1 \leq \frac{1}{2y}.$$

Ce qui entraîne que pour tout $y \in]0, 1/2[$

$$1 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

donc la solution x_2 *est à rejeter et on aura* $f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$ *pour tout* y *appartenant à* $]0, 1/2]$ *et* $f^{-1}(0) = 0$.

Solution de l'exercice 1.1.19.
i) Il est clair que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0 \ \ et \ x \neq 0} g(x) = 1,$$

ii) D'après le cours et i),

$$\lim_{x \to 0} gof(x) = 1.$$

D'autre part, comme

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sin(1)$$

alors

$$\lim_{x \to 0} fog(x) = \sin(1).$$

Solution de l'exercice 1.1.20. *On rappelle que l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) de* $\mathbb{R}$ *par une fonction continue est un ouvert (resp. un fermé) de* $\mathbb{R}$. *Or*

$$\{x \in \mathbb{R}/ \ \ f(x) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty[)$$

et

$$\{x \in \mathbb{R}/ \ \ f(x) < a\} = f^{-1}(] - \infty, a[).$$

Donc ce sont deux ouverts de $\mathbb{R}$ *car* $]a, +\infty[$ *et* $]-\infty, a[$ *sont deux ouverts de* $\mathbb{R}$ *et* f *est continue sur* $\mathbb{R}$. *D'autre part*

$$\{x \in \mathbb{R}/ \ \ f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$$

qui est un fermé de $\mathbb{R}$ *car le singleton* $\{a\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$ *et la fonction est continue sur* $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 1.1.21. *Soit x appartenant à $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est par tout dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x. Et comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors f et g sont continues en x. Donc*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Solution de l'exercice 1.1.22.
i) Si x appartient à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x. Or par définition $f(x_n) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = x$$

qui est différent de $f(x) = 1-x$ (sauf si $x = 1-x$ valeur qui donne $x = \frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$). Donc f n'est continue en aucun x irrationnel. D'autre part si y appartient à $\mathbb{Q}^*$, alors il existe une suite $(y_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ($i.e.$ $y_n = y + \frac{\pi}{n}$), qui converge vers y. Mais on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow\infty} f(y_n) &= \lim_{n\longrightarrow\infty}(1-y_n)\\ &= 1-y\end{aligned}$$

qui est différent de $f(y) = y$ sauf en $y = \frac{1}{2}$. Donc f n'est continue en aucun point x rationnel différent de $\frac{1}{2}$. La conclusion est que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$.
ii) Il est à remarquer que pour tout $x \neq 0$, l'égalité $x = \frac{1}{x}$ est équivalente à $x = \pm 1$. Un raisonnement analogue à la quetion i), montre que g est uniquement continue en 1 et -1. Autrement dit g n'est continue nulle part ailleurs. Noter aussi que si $x = 0$ et si $x_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ avec $x_n \in \mathbb{Q}$ alors, $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{x_n} \neq 0$.

Solution de l'exercice 1.1.23. *La fonction g est définie et est continue sur $\mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\}$, car c'est la somme, le produit et le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\}$. Maintenant au voisinage de 0, posons $y = \pi x$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. De plus, on a*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{\frac{1}{\pi}y(\frac{1}{\pi^2}y^2-1)}\\ &= \lim_{y\to 0} \pi\frac{\sin y}{y}\frac{1}{\frac{1}{\pi^2}y^2-1}\\ &= -\pi\end{aligned}$$

car $\lim_{y\to 0}\pi\frac{\sin y}{y}=\pi$ *et* $\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\pi^2}y^2-1}=-1.$
Un calcul analogue au précédent montre que g *est aussi prolongeable par continuité aux points* $x=-1$ *et* $x=1$*. En effet, au voisinage de* 1*, on pose* $y=x-1$*. Donc, quand* $x\longrightarrow 1,\ y\longrightarrow 0$*. Et, on a*

$$g(x)=\frac{sin(\pi(y+1)}{(y+1)y(y+2)}=\frac{-sin(\pi y}{y}\frac{1}{(y+1)(y+2)},$$

d'où $\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{y\to 0}\frac{-sin(\pi y)}{y}\frac{1}{(y+1)(y+2)}=\frac{-\pi}{2}.$
Au voisinage de -1*, on pose* $z=x+1$*. On a donc,*

$$\lim_{x\to -1}g(x)=\lim_{z\to 0}\frac{sin(\pi(z-1))}{(z-1)z(z-2)}=\frac{\pi}{2}.$$

Solution de l'exercice 1.1.24.
i) On considère la fonction g *définie sur* $[a,b]$ *par*

$$g(x)=f(x)-x.$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ *et vérifie :* $g(a)=f(a)-a\geq 0$ *et* $g(b)=f(b)-b\leq 0$*. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à* g *sur* $[a,b]$*, il existe* x *appartenant à* $[a,b]$ *tel que* $g(x)=0$*, autrement dit* $f(x)=x$*.*
Cette propriété reste vraie, même si l'intervalle $]a,b[$ *est ouvert et borné, et la fonction bornée, car le raisonnement ci-dessus entraînera la même conclusion. En effet, la fonction* f *est prolongeable par continuité en* a *et en* b*. On pose*
$\left\{\begin{array}{l}\widetilde{f}(a)=lim_{x\longrightarrow a^+}f(x);\\ \widetilde{f}(b)=lim_{x\longrightarrow b^-}f(x),\end{array}\right.$ *et on applique le même raisonnement à* $\widetilde{f}$ *sur* $[a,b]$*.*
ii) Si en revanche, l'intervalle n'est pas borné la propriété ne reste pas vraie. En effet, considérons l'intervalle $]0,+\infty[$*et la fonction définie de* $]0,+\infty[$ *dans lui même par* $g(x)=x^2+x$*.* g *n'admet pas de point fixe dans* $]0,+\infty[$ *car l'équation* $g(x)=x$ *admet pour unique solution dans* $\mathbb{R}$ *la valeur* $x=0$ *qui n'appartient pas à* $]0,+\infty[$*.*

Solution de l'exercice 1.1.25.
i) On rappelle qu'une fonction f *est dite lipschitzienne s'il existe une constante positive (non nulle)* k *telle que*

$$|f(x)-f(y)|\leq k\,|x-y|\qquad\forall\ x,y\in]-\infty,+\infty[.$$

D'autre part f est uniformément continue sur $]-\infty,+\infty[$ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \quad \forall x,y \in]-\infty,+\infty[: |x-y|<\eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Donc pour une fonction lipschitzienne, il suffit de prendre $\eta=\varepsilon/k$.
ii) Etudions maintenant la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\sqrt[3]{x}$ c'est-à-dire la racine cubique de x. Cette fonction est impaire, donc il suffit de l'étudier sur $[0,+\infty[$. Soit $\varepsilon>0$, et supposons que $\left|\sqrt[3]{x}\_\sqrt[3]{y}\right|<\varepsilon$. On a

$$x-y=(\sqrt[3]{x}\_\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}).$$

On en déduit que si $y>1$, alors il suffit de prendre $\eta<\frac{3}{4}\varepsilon$, pour avoir

$$|x-y|<\eta \Longrightarrow \left|\sqrt[3]{x}\_\sqrt[3]{y}\right|<\varepsilon,$$

ce qui montre que cette fonction est uniformément continue sur $]1,+\infty[$. En effet, la fonction

$$k : x \longrightarrow x^2+yx+y^2$$

vérifie, $k(x)\geq\frac{3}{4}y^2$. Donc,

$$\frac{|x-y|}{k(x)}=|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}|\leq\frac{4|x-y|}{3y^2}.$$

Si de plus $y>1$, alors $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}|\leq\frac{4}{3}|x-y|$.
D'autre part toute fonction continue est uniformément continue sur tout compact (théorème de Heine). Donc la racine cubique est uniformément continue sur $[0,1]$. On conclut (d'après la parité) que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Il est claire que cette fonction n'est pas lipschitzienne car sa dérivée n'est pas bornée. En effet, $f'(x)=\frac{x^{-2/3}}{3}$ tend vers l'infini quand x tend vers 0. Donc une fonction uniformément continue n'est pas nécessairement lipschitzienne. Il est facile de remarquer que si f est lipschitienne de rapport k et dérivable au point x alors $|f^{'}(x)|\leq k$.

Solution de l'exercice 1.1.26.

1) La fonction $f:x\longmapsto\sin(x^2)$, n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ i.e.
$\exists\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists\ x,y\in\mathbb{R}$, tels que

$$|x-y|<\eta \ \textit{et} \ \left|\sin(x^2)-\sin(y^2)\right|\geq\varepsilon.$$

D'abord, comme la fonction $x \longmapsto x^2$ est paire, il suffit de montrer la non-continuité uniforme de la fonction proposée sur $\mathbb{R}^+$. Plus exactement, on va montrer que pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, et pour tout $\eta > 0$, ils existent $x, y \in \mathbb{R}^+$ tel que $|x-y| < \eta$ et $|\sin(x^2) - \sin(y^2)| \geq \frac{1}{2}$. On choisit pour tout $n > 1$, $x_n = \sqrt{\frac{n}{2}\pi}$ et $y_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}$

Il est clair que $|x_n - y_n| = \frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}+\sqrt{\frac{n}{2}\pi}}$ qui tend vers 0 quand n tens vers l'infini, alors que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sin(x_{2n}^2) - \sin(y_{2n}^2)\right| = 1 > \varepsilon(= \frac{1}{2}).$$

On en conclut que la fonction $\sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) On va montrer que cette fonction n'est pas uniformément continue sur $]0,\infty[$. En effet, on va montrer que pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall\ \eta > 0$, $\exists x, y \in\ ]0,\infty[$, tels que $|x-y| < \eta$ et $\left|\sin(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{y})\right| \geq \varepsilon$.

Il suffit de considérer $\eta = \frac{1}{n}$, puis prendre $x_n = \frac{2}{n\pi}$ et $y_n = \frac{2}{(n+1)\pi}$. Pour ces valeurs, nous aurons

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \forall \in \mathbb{N}^*$$

et

$$\left|\sin(\frac{1}{x_{2n}}) - \sin(\frac{1}{y_{2n}})\right| = 1 \geq \frac{1}{2}.$$

Solution de l'exercice 1.1.27. *La fonction f admet une limite finie l au voisinage de $+\infty$, donc*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tels que } \forall\ x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Il en résulte, pour $\eta > 0$ et y tel que $|x-y| < \eta$ avec $y > A$ et $x > A$, que

$$|f(y) - l| < \varepsilon \text{ et } |x-y| < \eta$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(f(x) - l) + (l - f(y))| \\ &\leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc f est uniformément continue sur $[\alpha, A]$ et $[A, +\infty[$, pour tous $\alpha,\ A \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha < A$. Il en résulte que f est uniformément continue sur $]0,\infty[$. La réciproque est fausse car la fonction identique $x :\longrightarrow x$ est uniformément continue sur $]0,\infty[$ mais elle n'admet pas de limite au voisinage de $+\infty$.

Solution de l'exercice 1.1.28. *La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ car elle apparait comme la somme de deux fonctions continues sur cet intervalle. Il s'agit de la fonction $\sin(x)$ et la fonction constante égale -1. D'autre part cette même fonction est continue sur $]-\infty,0[$ car elle s'écrit comme la composée de deux fonctions continues sur $]-\infty,0[$. Il s'agit de la fonction logarithme ($\ln$) et la fonction ($|x|+1$). Il reste à étudier la continuité en 0. Pour cela, on va calculer les limites à droite et à gauche de 0. En effet*

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x) - 1 = -1,$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(|x|+1) = 0.$$

On en déduit que la fonction f n'est pas continue en 0.
Par conséquence f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Solution de l'exercice 1.1.29. *La fonction qui à x fait correspondre $\ln(x^2+x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (la fonction logarithme $(\ln)$ et la fonction polynôme x^2+x+1 qui est toujours positive). On en conclut que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de la fonction précèdente et de la fonction constante égale -1. D'autre part $f(0) = -1$ et $f(e) > 0$ car $\ln(e^2+e+1) > 1$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f sur l'intervalle $[0,e]$, il existe $c \in]0,e[$ tel que $f(c) = 0$.*

Solution de l'exercice 1.1.30.
A) a) Sur les intervalles $]0,1]$ et $]1,+\infty[$ la fonction f est continue car elle apparaît comme la somme, le produit et la composée de fonctions continues sur ces deux intervalles. Etudions la continuité de f en 1. On a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x(x-2)\ln(\frac{x}{2-x}) = 0$$

et

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -2\exp((2-x)\ln(x-1)) = 0$$

donc f est continue en 1. Etudions maintenant la continuité de f à droite de 0. Nous avons par hypothèse $f(0) = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x(x-2)\ln(\frac{x}{2-x}) \\
&= \lim_{x\to 0^+} -(x-2)^2\frac{x}{2-x}\ln(\frac{x}{2-x}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car

$$\frac{x}{2-x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+ \quad et \quad X\ln X \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Donc f est continue à droite de 0. On en conclut que f est continue sur $[0,+\infty[$.
b) Dérivabilité de f sur $]0,1[$: Utilisons la définition de la dérivée du produit et celle de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables. On obtient pour tout x appartenant à $]0,1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)\ln(\frac{x}{2-x}) + x\ln(\frac{x}{2-x}) + x(x-2)\frac{1}{\frac{x}{2-x}}\frac{2-x-(-x)}{(2-x)^2} \\ &= 2(x-1)\ln(\frac{x}{2-x}) - 2. \end{aligned}$$

Dérivabilité de f sur $]1,+\infty[$: On a

$$f(x) = -2\exp((2-x)\ln(x-1)) \quad \forall x \in]1,+\infty[$$

donc, $\forall x \in]1,+\infty[$, on a

$$f'(x) = -2[2ln(x-1) + \frac{2-x}{x-1}]exp[(2-x)ln(x-1)]$$

ce qui montre que f est dérivable sur $]1,+\infty[$.
Dérivabilité en 1 : Calculons les dérivées à droite et à gauche de f en 1.

$$\begin{aligned} f'_g(1) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-2)\ln(\frac{x}{2-x})}{x-1}. \end{aligned}$$

Posons $u = x-1$, donc u tend vers 0 par valeurs négatives quand x tend vers 1 par valeurs inférieures i.e. $u \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$f'_g(1) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(u+1)(u-1)\ln(1+u)}{u} - \frac{(u+1)(u-1)\ln(1-u)}{u}.$$

Or,

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{ln(1-u}{u} = -1 \; et \; \lim_{u\to 0^-} \frac{ln(1+u}{u} = 1.$$

Donc, $f'_g(1) = -2$. *De même on a*

$$\begin{aligned} f'_d(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{-2(x-1)^{2-x}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} -2(x-1)^{1-x} \\ &= \lim_{x\to 1^+} -2\exp((1-x)\ln(x-1)) \\ &= -2. \end{aligned}$$

On en déduit que f *est dérivable en* 1 *et que* $f'(1) = -2$.
c) Par hypothèse $f(0) = f(1) = 0$. *De plus* f *est continue sur* $[0,1]$ *et est dérivable sur* $]0,1[$, *donc d'après le théorème de Rolle appliqué à* f *sur l'intervalle* $[0,1]$, *il existe* $a \in]0,1[$ *telle que* $f'(a) = 0$.
d) On a

$$f(a) = (a-2)a\ln(a) - a(a-2)\ln(2-a) > 0$$

et

$$f(2) = -2(2-1)^{2-2} < 0.$$

Montrons directement que f' *est strictement décroissante sur* $[a,1]$.
Soit $x \in [a,1]$ *avec* $a < x < 1$, *alors*

$$0 < \frac{x}{2-a} < \frac{x}{2-x} < x$$

donc

$$\ln(\frac{a}{2-a}) < \ln(\frac{x}{2-x}) < \ln x < 0$$

car la fonction logarithme ($\ln$ *) est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.
De plus

$$a-1 < x-1 < 0$$

donc

$$0 < 2(x-1)\ln(\frac{x}{2-x}) < 2(a-1)\ln(\frac{a}{2-a})$$

ce qui nous permet de déduire que pour tout $x \in]a,1[$, *on a*

$$f'(1) < f'(x) < f'(a).$$

Comme $f'(1) = -2$ *et* $f'(a) = 0$, *alors*

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a,1[$$

et par conséquent f *est strictement décroissante sur* $[a, 1]$. *Il est facile de remarquer que*

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in \,]1, 2[$$

car

$$-\ln(x-1) > 0 \quad et \quad \frac{2-x}{x-1} > 0.$$

D'où l'on déduit le tableau de variation suivant pour f'

x	a		1		2
$f'(x)$	0	$-$	-2	$-$	0
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

De plus

$$(f^{-1})'(0) = -\frac{1}{2}$$

car

$$f(1) = 0 \quad et \quad (f^{-1}of)'(x) = (f^{-1})'[f(x)]f'(x) = 1.$$

B) 1) On a,

$$\varphi(x) = exp[(x + \frac{1}{2})ln(1 + \frac{1}{x})]$$

donc φ *est continue sur* $[1, +\infty[$ *et est dérivable sur cet intervalle en tant que somme, produit et composé de fonctions continues et déribables sur* $[1, +\infty[$. *De plus,*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \; \varphi'(x) = (1 + \frac{1}{x})^{(x+\frac{1}{2})}[ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{2x+1}{2x(x+1)}][.$$

Pour connaître le signe de φ', *il suffit d'étudier la fonction* $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{2x+1}{2(x+1)x}$. *On a,*

$$\forall x \in]1, +\infty[, \; g'(x) = \frac{2}{4x^2(x+1)^2} > 0,$$

d'où le tableau de variation de g,

x	*1*		$+\infty$
g'(x)		$+$	
g(x)	$ln(2) - \frac{3}{4}$	$\nearrow$	0^-

En effet, au voisinage de $+\infty$ *on a le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 :*

$$ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x})$$

et la division suivant les puissance croissantes permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{2x(x+1)} &= \frac{1}{2x}.\frac{2x+1}{(x+1)} \\ &= \frac{1}{2x}(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\alpha(\frac{1}{x})).\end{aligned}$$

Ce qui donne le déveleppement au voisinage de $+\infty$ *de la fonction* g :

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{x^3}\gamma(\frac{1}{x^3}) \\ &= -\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{x^3}\gamma(\frac{1}{x^3})\end{aligned}$$

Remarque *:* $\lim_{x\to+\infty}\epsilon(\frac{1}{x}) = 0 = \lim_{x\to+\infty}\alpha(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty}\gamma(\frac{1}{x})$ *ce qui montre que* $g(x)$ *est négative et tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$. *On en déduit le tableau de variation de* φ :

2)

x	*1*		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	
$\varphi(x)$	$2^{\frac{3}{2}}$	$\searrow$	e

Car,

$$(x+\frac{1}{2})ln(1+\frac{1}{x}) = 1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\mathcal{O}(\frac{1}{x})$$

ce qui implique que

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{x}} = e$$

3) On a,

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{e^n}{n^n}\frac{n!}{\sqrt{n}}\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} \\ &> 1,\end{aligned}$$

puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) > e$. *On en déduit alors que la suite* $(u_n)_n$ *est décroissante. Elle est donc convergente car elle est minorée par 0.*

Solution de l'exercice 1.1.31.
a) Pour tout x non nul, on a

$$f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 2\cos(\frac{1}{x^2}).$$

Pour la dérivée de f en 0, on va passer par la définition

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(\frac{1}{x^2})}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}). \end{aligned}$$

Or $\sin(\frac{1}{x^2})$ est toujours compris entre -1 et 1, donc $x^2\sin(\frac{1}{x^2})$ est compris entre $-x^2$ et x^2 qui tendent tous les deux vers 0 quand x tend vers 0. Et comme

$$-x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) \leq x^2$$

on a

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) = 0.$$

D'où

$$f^{'}(0) = 0.$$

La fonction dérivée de f n'est pas continue en 0 car la fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x^2})$, n'admet pas de limite au voisinage de 0. En effet, il suffit de considérer les deux suites suivantes : $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ et $y_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$ qui sont deux suites numériques qui convergent vers 0. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\cos(\frac{1}{x_n^2}) = \cos 2n\pi = 1$$

et

$$\cos(\frac{1}{y_n^2}) = \cos(2n+1)\pi = -1.$$

b) En posant $X = \frac{1}{x}$, on aura

$$f'(x) = f'(\frac{1}{X}) = \frac{3}{X^2}\sin(X^2) - 2\cos(X^2)$$

donc $f'(\frac{1}{X}) = 0$ est équivaut à : $3\sin(X^2) - 2X^2\cos(X^2) = 0$ pour tout $X \neq 0$. D'autre part $f(0) = f(\frac{1}{\sqrt{\pi}}) = 0$, et f est continue sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]$

et est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$*, donc d'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction* f *sur l'intervalle* $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]$*, il existe* $c \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right[$ *telle que :* $f'(c) = 0$*. Autrement dit, pour* $c = \frac{1}{x_0}$*, on aura*

$$f'(x_0^{-1}) = 0 \Longleftrightarrow 3\sin(x_0^2) - 2x_0^2\cos(x_0^2) = 0.$$

Solution de l'exercice 1.1.32.

Posons, $f(x) = \ln(\sin x)$ *et* $g(x) = (\pi - 2x)^2$*. On a* $\lim_{x\to\pi/2} f(x) = \lim_{x\to\pi/2} g(x) = 0$*. De plus* f *et* g *sont continues et dérivables au voisinage de* $\pi/2$ *avec* $g'(x) \neq 0$ *sauf en* $\pi/2$*. Donc d'après la règle de l'hopital*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\ &= \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\cos x/\sin x}{-4(\pi-2x)}\right).\end{aligned}$$

En appliquant une deuxième fois la règle de l'hopital, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{-1}{\sin^2(x)}}{8}\\ &= -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, un calcul simple montre que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^3 sin(x)} = +\infty$$

ce qui termine la démonstration de l'exercice.

Solution de l'exercice 1.1.33.

a) Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f : t \longmapsto \ln(1+t)$ *sur l'intervalle* $[0, x]$ *(avec* $x > 0$*). Alors, il existe* $c \in]0, x[$ *tel que*

$$f(x) - f(0) = (x-0)f'(c) \Longleftrightarrow \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

Or, $0 < c < x$ *entraîne que* $1 < 1+c < 1+x$*, donc* $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$*. On en déduit que*

$$\ln(1+x) \leq x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Pour l'autre inégalité, on va appliquer le théorème des accroissements finis à l'application $g : t \longmapsto \ln(1+t) + \frac{t^2}{2}$ *sur l'intervalle* $[0, x]$ *(avec* $x > 0$*). Alors il existe* $c \in]0, x[$ *tel que*

$$g(x) - g(0) = (x - 0)g'(c)$$

ce qui est équivalent à

$$\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} = x(\frac{1}{1+c} + c).$$

Dans ce cas, on peut remarquer que la fonction $h : x \longmapsto \frac{1}{1+x} + x$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$ *car*

$$h'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + 1$$

qui est toujours supérieur ou égale à 0. D'autre part $h(0) = 2$*, donc pour tout* $x > 0$*, on a*

$$\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} \geq 2x \geq x.$$

b) D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction arctg sur l'intervalle $[0, x]$ *(avec* $x > 0$*), il existe* $c \in]0, x[$ *tel que*

$$arctg(x) - arctg(0) = x\frac{1}{1+c^2}.$$

Or, $0 < c < x$ *implique* $1 < 1 + c^2 < 1 + x^2$*. Donc*

$$\frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x$$

ce qui entraîne que pour tout $x \geq 0$*, on a*

$$\frac{x}{1+x^2} \leq arctgx \leq x.$$

c) Pour $\alpha \in]0, 1[$*, appliquons le théorème des accroissements finis à l'application* $f : t \mapsto t^\alpha$ *sur l'intervalle* $[x, x+1]$ *(avec* $x > 0$*). Alors, il existe* $c \in]x, x+1[$ *tel que*

$$(1+x)^\alpha - x^\alpha = \alpha c^{\alpha - 1}.$$

Or pour $0 < x < c < 1 + x$*, on a*

$$x^{1-\alpha} < c^{1-\alpha} < (1+x)^{1-\alpha} \quad car \quad 1 - \alpha > 0.$$

Cela entraîne que

$$(1+x)^{\alpha-1} < c^{\alpha-1} < x^{\alpha-1} \quad car\ \alpha - 1 < 0.$$

D'où

$$\alpha(1+x)^{\alpha-1} \leq (1+x)^{\alpha} - x^{\alpha} \leq \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x \geq 0.$$

Pour la déduction, nous allons remplacer x par les n premiers entiers naturels non nuls. On va obtenir

$$\begin{array}{rcl} \alpha 2^{\alpha-1} & \leq & 2^{\alpha} - 1^{\alpha} \leq \alpha 1^{\alpha-1} \\ \alpha 3^{\alpha-1} & \leq & 3^{\alpha} - 2^{\alpha} \leq \alpha 2^{\alpha-1} \\ .... & \leq & .... \leq ..... \\ .... & \leq & .... \leq ..... \\ \alpha n^{\alpha-1} & \leq & n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha} \leq \alpha (n-1)^{\alpha-1}. \end{array}$$

Faisons la somme membres à membres, on obtient après simplification

$$\alpha \sum_{k=2}^{n} k^{\alpha-1} \leq n^{\alpha} - 1 \leq \alpha \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha-1}$$

ce qui entraîne que

$$(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}) - 1 \leq \frac{n^{\alpha}-1}{\alpha} \leq (\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}) - \alpha n^{\alpha-1}.$$

En divisant par n^{α}, on obtient

$$\frac{1}{n^{\alpha}}(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}) - \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{n^{\alpha}-1}{n^{\alpha}\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}) - \alpha n^{-1}.$$

Passons maintenant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}) \leq \frac{1}{\alpha} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}).$$

d'où l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}) = \frac{1}{\alpha}$.

Solution de l'exercice 1.1.34.

a) D'après la formule de Taylor à l'ordre 3 appliquée à la fonction $f: t \mapsto \sqrt{1+t}$ *sur l'intervalle* $[0,x]$*, il existe* $c \in]0,x[$ *telle que*

$$f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(c).$$

Ici, on a

$$f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}} \Rightarrow f''(0) = \frac{-1}{4}$$

et

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \Rightarrow f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}.$$

Remplaçons dans la formule de Tailor $f^{'}(0), f^{''}(0) et f^3(0)$ *par leurs valeurs. On obtient*

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(c).$$

Sachant que le dernier terme est negligeable et que $\frac{x^3}{16} \geq 0$ *pour tout* $x \geq 0$*, alors*

$$\sqrt{1+x} - 1 \geq \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Puis si on écrit la formule de Taylor à l'ordre 4, on va s'appercevoir à l'aide d'un même raisonnement que

$$\sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \quad (\forall x \geq 0).$$

Pour la déduction, on va remplacer x *par* $\frac{k}{n^2}$*, ce qui va donner*

$$\frac{k}{2n^2} - \frac{k^2}{8n^4} \leq \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{k}{2n^2} - \frac{k^2}{8n^4} + \frac{k^3}{16n^6}.$$

Faisons la somme membres à membres, on obtient

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{2n^2} - \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{8n^4} \leq \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{2n^2} - \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{8n^4} + \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{16n^6}.$$

Or on sait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *donc on aura*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{2n^2} = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{8n^4} = 0.$$

D'autre part

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{16n^6} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3/n^3}{16n^3} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} 1}{16n^3}$$

ce qui implique

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{16n^6} \leq \frac{n}{16n^3} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

On en déduit alors que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1) = \frac{1}{4}.$$

b) On va d'abord considérer la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, *et on va lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *sur un intervalle de type* $]0, x[$ *(où* x *est un nombre réel srtictement positif), car la fonction est de classe* C^∞ *sur* $]-1, +\infty[$. *Nous savons alors qu'il existe un* c *compris strictement entre* 0 *et* x *tels que*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \ln^{(n+1)}(c).$$

Nous savons aussi que pour tout $c \in]0, x[$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \ln^{(n+1)}(c) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc, pour $x = 1$, *on aura*

$$\begin{aligned} \ln(2) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième limite, il suffit d'appliquer la formule de Taylor à l'ordre n *sur l'intervalle* $]0, x[$ *(où* x *est un nombre réel srtictement positif) à la fonction* $t \longmapsto arctg(t)$*. Il va exister un* c *compris strictement entre* 0 *et* x *tels que*

$$arctgx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!} arctg^{(2n+2)}(c).$$

Donc en tenant compte du fait que le reste tend vers 0 *quand* n *tend vers l'infini et en remplaçant* x *par* 1*, on obtient*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Solution de l'exercice 1.1.35. *Soit* $f : x \longmapsto -\ln(\ln x)$*. Son domaine de définition est* $]1, +\infty[$ *car il faut que* $\ln x$ *soit strictement positif. D'autre part, il est connu que la fonction* $\ln$ *est concave, que la composée de deux fonctions concaves est une fonction concave et que la symétrique (i.e.* $-f$*) d'une fonction concave est une fonction convexe. Donc pour tout* $x > 1$ *et pour tout* $\lambda \in]0, 1[$*, on a pour tous* $x_1, x_2 \in D_f$

$$-\ln(\ln(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \leq -\lambda \ln(\ln(x_1)) - (1-\lambda)\ln(\ln(x_2))$$

ce qui implique que

$$\ln(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq (\ln x_1)^{\lambda} \ln(x_2)^{1-\lambda}.$$

En particulier pour $\lambda = \frac{1}{2}$*, on a*

$$\ln(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geq \sqrt{(\ln x_1)(\ln x_2)}.$$

Solution de l'exercice 1.1.36. *Pour donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage 0 (i.e.* $DL_5(0)$*) de* $\frac{x}{\sin x}$*, il faut donner celui de* $\sin x$ *à l'ordre 5 car on va simplifier par* x *vu que le développement limité de* $\sin x$ *commence par* x*. Comme le (* $DL_5(0)$*) de* $\sin x$ *est*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

on va effectuer la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 4 *de* 1 *par* $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$*.*

$$
\begin{array}{c|l}
+1+\ 0\ +\ 0 & 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120} \\
\hline
-1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120} & \\
0+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120} & 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360} \\
0-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{36} & \\
0+0+\frac{7x^4}{360} &
\end{array}
$$

d'où

$$f_1(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + x^4\varepsilon(x).$$

Remarquer que si vous donner le développement limité de la fonction sinus jusqu'à l'ordre 4 *seulement le résultat de la division euclidienne donnera*

$$1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36},$$

(résultat qui donne une mauvaise approximation par rapport au précédent).
Pour $f_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$*, on va donner le (* $DL_4(0)$*) de la fonction* $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ *car on divise par* $1+x$*. Or la fonction* f *est de classe* C^5 *au voisinage de* 0*, donc d'après la formule de Taylor, on aura*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + x^4\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$*. Or*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) \Longrightarrow f(0) = 0, \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(0) = 1, \\
f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \Longrightarrow f''(0) = -1, \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 2
\end{aligned}
$$

et

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \Longrightarrow f^{(4)}(0) = -6.$$

On en déduit que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x)\ .$$

La division suivant les puissances croissantes, donne

$$f_2(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \frac{7x^4}{12} + x^4\varepsilon(x)\ .$$

Pour la fonction $f_3(x) = \frac{x}{e^x-1}$, *il faut aussi développer la fonction* $e^x - 1$ *jusqu'à l'ordre* 5 *car son développement limité commence par* x, *ce qui nous permettera de simplifier le rapport* $\frac{x}{e^x-1}$ *par* x. *Il est connu que*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On va donc effectuer la division suivant les puissances croissantes de 1 *par* $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}$

$$\begin{array}{c|c}
1 + 0 \;\; + \;\; 0 + \;\; 0 + \;\; 0 & 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \\
\hline
-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} & \\
0 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} & 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} \\
0 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} & \\
0 + 0 + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{80} & \\
0 + 0 - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{72} & \\
0 + 0 + 0 + 0 - \frac{x^4}{720} &
\end{array}$$

ce qui donne

$$f_3(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + x^4\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

La fonction $f_4(x) = \sqrt{1+\sin x}$ *est la composée de deux fonctions développables en* 0, *en locurrence la fonction* $x \mapsto \sin x$ *et la fonction* $x \mapsto \sqrt{1+x}$. *Commençons par donner le* $(DL_4(0))$ *de la fonction sinus*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Puis posons : $u = x - \frac{x^3}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ *(i.e. u tend vers 0 quand* x *tend vers* 0, *et donnons le* $(DL_4(0))$ *de la fonction* $\sqrt{1+u}$. *Soit*

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \frac{5u^4}{2^7} + u^4\varepsilon(u) \text{ avec } \varepsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $\sqrt{1+\sin x}$, *il suffit de remplacer dans la dernière expression* u

par $x - \frac{x^3}{6}$*, qui est la partie principale de* $\sin x$ *et de ne considérer que les monômes dont la puissance de* x *est inférieure ou égale à 4. On obtient*

$$\sqrt{1+\sin x} = 1+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})-\frac{1}{8}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{16}(x-\frac{x^3}{6})^3-\frac{5}{2^7}(x-\frac{x^3}{6})^4+x^4\varepsilon(x)$$

donc

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{2^7.3} + x^4\varepsilon(x).$$

Enfin, $f_5(x) = \exp(\cos x) = e^{\cos x}$ *est aussi la composée de deux fonctions qui sont développables à l'ordre 4 au voisinage de 0. En effet, on a*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \ \textit{avec}\ \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

et

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + y^4\gamma(y) \ \textit{avec}\ \gamma(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On va poser dans ce cas $v = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$*. Remarquer q'on ne peut pas prendre* v *toute la partie principale de* $\cos x$ *(i.e.* $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$*) car elle tend vers 1 quand* x *tend vers 0. D'où*

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e^{1+v} + v^4\gamma(v) \ \textit{avec}\ \gamma(v) \underset{v\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &= ee^v + v^4\gamma(v) \ \textit{avec}\ \gamma(v) \underset{v\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, on aura

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e[1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + \frac{1}{6}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^3 + \\ &\quad \frac{1}{24}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^4 + x^4\beta(x)] \end{aligned}$$

avec $\beta(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$*. Encore une fois dans ce développement on ne va considérer que les monômes dont la puissance de* x *est inférieure ou égale à 4. Ainsi, on obtient*

$$e^{\cos x} = e\left[1 - \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{17x^4}{16.24} + x^4\beta(x)\right].$$

Solution de l'exercice 1.1.37. *D'abord au voisinage de $+\infty$, on donne un développement limité généralisé. Dans ce cas, on constate que*

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} \text{ (si } x \neq 0).$$

Si de plus, on remplace $\frac{1}{x}$ par X, on constate que $X \underset{x\to\infty}{\to} 0$. Donc en effectuant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3, de $1+X$ par $2+X$, on va obtenir le $(DL_3(0))$ de la fonction $\frac{x+1}{x+2}$, qui est

$$\frac{x}{x+1} = \frac{X+1}{2X+1} = 1 - X + 2X^2 - 4X^3 + X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \varepsilon(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Puis comme au voisinage de 0, on a

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + u^3\delta(u) \text{ avec } \delta(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 1 + \frac{1}{2}(-X+2X^2-4X^3) - \frac{1}{8}(-X+2X^2-4X^3)^2 +$$

$\frac{1}{16}(-X+2X^2-4X^3)^3 + X^3\varepsilon(X)$,
ce qui donne en éliminant tous les termes dont l'exposant est supérieur ou égale à 4.

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 1 - \frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16} + X^3\varepsilon(X).$$

Ainsi, $f(x)$ apparaît comme étant $arctg(1+u)$ avec $u = -\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16} \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$. On va maintenant, donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $arctgx$ et ce en utilisant la formule de taylor. En effet la fonction $g = arctg$ est une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, donc on peut donner sa formule de Taylor sur un intervalle $(1, 1+u)$ suivant que u est supérieur ou inférieur à 0. Il existe alors c compris entre 1 et $1+u$ telle que

$$g(1+u) = g(1) + \frac{u}{1!}g'(1) + \frac{u^2}{2!}g''(1) + \frac{u^3}{3!}g^{(3)}(1) + \frac{u^4}{4!}g^{(4)}(c).$$

Or

$$\begin{aligned} g(1+u) &= arctg(1+u) \text{ et } g(1) = \frac{\pi}{4}, \\ g'(u) &= \frac{1}{1+u^2} \Longrightarrow g'(1) = \frac{1}{2}, \\ g''(u) &= \frac{-2u}{(1+u^2)^2} \Longrightarrow g''(1) = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

et

$$g^{(3)}(u) = \frac{-2(1+u^2)+8u^2}{(1+u^2)^3} \Longrightarrow g^{(3)}(1) = \frac{1}{2}.$$

En posant $u = -\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} arctg(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16}) \\ &-\frac{1}{4}(-\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16})^2 \\ &+\frac{1}{12}(-\frac{X}{2} + \frac{7X^2}{8} - \frac{25X^3}{16})^3 \\ &+X^3\varepsilon(X) \text{ avec } \varepsilon(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

En ne considérant que les monômes dont la puissance de X *est inférieure ou égale à 3, on obtient*

$$arctg(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}) = \frac{\pi}{4} - \frac{X}{6} + \frac{11X^2}{48} - \frac{25X^3}{48} + X^3\varepsilon(X),$$

ce qui nous permet de donnet le développement limité généralisé au voisinage de $+\infty$ *de* $arctg(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}})$ *qui est*

$$arctg(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6x} + \frac{11}{48x^2} - \frac{25}{48x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

Solution de l'exercice 1.1.38. *Au voisinage de* $-\infty$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2-x-1} \\ &= \sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})} - \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})} \\ &= x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} - |x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = x(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}})$$

car $|x| = -x$ *au voisinage de* $-\infty$. *En posant* $X = \frac{1}{x}$, *on aura* $X \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, *donc*

$$(1+X^2+X^3)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}(X^2+X^3)+X^2\varepsilon(X) \text{ avec } \varepsilon(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et

$$(1-X-X^2)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}(-X-X^2)-\frac{1}{8}(-X-X^2)^2+X^2\alpha(X)$$

avec $\alpha(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$. *D'où*

$$\sqrt[3]{1+X^2+X^3}+\sqrt{1-X-X^2} = 2-\frac{X}{2}-\frac{7X^2}{24}+X^2\gamma(X)$$

avec $\gamma(X) \underset{X\to 0}{\longrightarrow} 0$. *Finalement, en revenant à* x, *on obtient*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2-x-1} \\ &= -\frac{1}{2}+2x-\frac{7}{24x}+\frac{1}{x}\gamma(\frac{1}{x}) \text{ avec } \gamma(\frac{1}{x}) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, au voisinage de $-\infty$, *la droite d'équation* $(y = -\frac{1}{2}+2x)$ *est asymptote à la courbe au voisinage de* $-\infty$. *De plus la courbe se trouve au dessus de son asymptote car* $(-\frac{-7}{24x} > 0)$ *au voisinage de* $-\infty$.

Solution de l'exercice 1.1.39.

1) a) le domaine de définition de cette fonction est $\mathbb{R}^*$

b) f *n'est pas prolongeable par continuité en* 0 *car*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{1+\exp(1/x)} = 0$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+x}{1+\exp(1/x)} = 1.$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{1+(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})\exp(1/x)}{[1+\exp(1/x)]^2}.$$

On en déduit que

$$f'(x) = (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})(\frac{x^2}{1+x+x^2} + e^{\frac{1}{x}})\frac{1}{[1+e^{\frac{1}{x}}]^2}$$

ce qui montre que f' s'écrit

$$f'(x) = (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})g(x)$$

où

$$g(x) = (\frac{x^2}{1+x+x^2} + e^{\frac{1}{x}})\frac{1}{[1+e^{\frac{1}{x}}]^2}$$

qui est clairement une fonction positive sur $\mathbb{R}^*$.
3) Pour cette question, il suffit d'étudier la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(t) = e^t - t.$$

En dérivant cette fonction, on obtient

$$k'(t) = e^t - 1.$$

Cette dérivée est nulle si et seulement si : $t = 0$, ce qui entraine que la fonction k est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Cela entraîne au même temps que la fonction k atteint son minimum en $t = 0$. Or $k(0) = 1$, donc pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$e^t - t \geq 1$$

ce qui implique que

$$e^t \geq t.$$

4) Il est clair que

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{1+x+x^2}$$

est toujours positif sur $\mathbb{R}^*$, donc f' est une fonction positive sur $\mathbb{R}^*$.
5) a) Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^x$ est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Pour avoir le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fontion g*, il suffit d'éffectuer la division suivant les puissances croissantes (jusqu'à l'ordre 3) de* 1 *par* $2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}$*, ce qui nous donne*

$$\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+x^3\varepsilon(x).$$

b) On en déduit qu'au voisinage de l'infini la fonction f *s'écrit*

$$f(x)=(1+x)(\frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{48x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x}))$$

avec

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(\frac{1}{x})=0.$$

Ce qui donne le développement généralisé au voisinage de l'infini à l'ordre 2 suivant

$$\frac{1+x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{48x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

6) L'équation de l'asymptote à la courbe de f *au voisinage de l'infini est*

$$y=\frac{1}{4}+\frac{x}{2}.$$

Cette asymptote est au dessus de la courbe de f *au voisinage de* $+\infty$*, car* $-\frac{1}{4x}$ *est négatif, et elle est au dessous de la courbe de* f *au voisinage de* $-\infty$ *car* $-\frac{1}{4x}$ *est positif.*

Solution de l'exercice 1.1.40.

i) Le domaine de définition de la fonction ch *est* $\mathbb{R}$ *tout entier. Cette fonction est continue sur son domaine de définition car elle s'écrit comme la somme de deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *à savoir :* $x\longmapsto e^x$ *et* $x\longmapsto e^{-x}$*. De plus cette fonction est paire car elle vérifie :* $ch(-x)=ch(x)$*. Elle est aussi dérivable comme étant la somme de deux fonctions dérivables et on a*

$$ch'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

ii) La dérivé $ch'(x)$ *est toujour positive sur* $\mathbb{R}^+$ *donc* $ch(x)$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$*. D'autre part, comme* ch *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *alors la fonction* ch *est une bijection de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $ch(\mathbb{R}^+)$ *qui n'est autre que l'intervalle* $[1,+\infty[$*.*

iii) Si $\arg ch$ *note la fonction réciproque de la fonction* ch*, alors par définition c'est la fonction définie de* $[1,+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *et qui à* y *appartenant*

à $[1,+\infty[$ *fait corespondre* x *appartenant à* $\mathbb{R}^+$ *telle que* $y = ch(x)$ *(FIG. 1.1).*
On en déduit facilement que e^x *est solution de l'équation* $X^2 - 2yX + 1 = 0$. *En effet*

$$(e^x) - 2\frac{e^x + e^{-x}}{2}\ e^x + 1 = 0.$$

Or les solutions de l'équation ci-dessus sont $y + \sqrt{y^2 - 1}$

$$x_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

et

$$x_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}.$$

La solution à retenir est

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1},$$

ce qui entraine que

$$\arg ch(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

iv) Quelque soit y *dans* $]1,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} \arg ch'(y) &= \frac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la formule de dérivation des fonctions réciproques, on obtient

$$\begin{aligned} \arg ch'(ch(x)) &= \frac{1}{ch'(x)} \\ &= \frac{1}{sh(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ch^2(x) - 1}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\arg ch'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

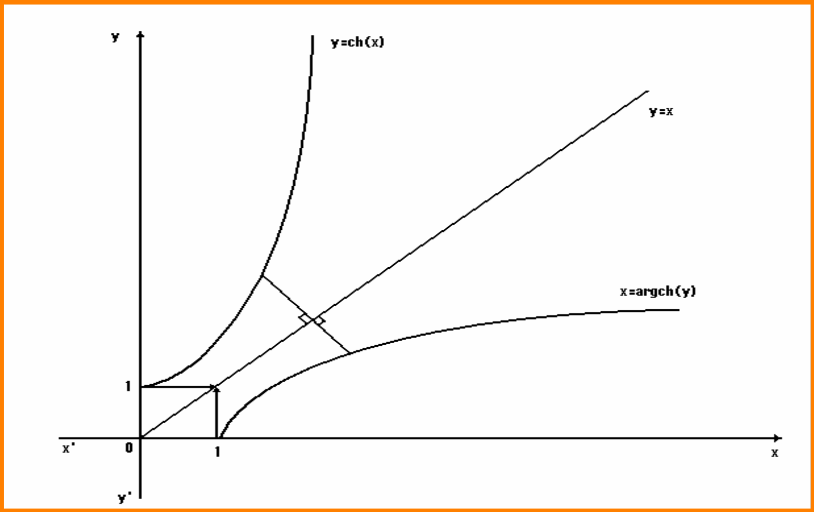

FIGURE 1.1 – ch et argch.

Solution de l'exercice 1.1.41. *Correction de l'examen de Janvier 2008, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir.*

A) **Exercice1**

1) D'une part $P_n(0) = -1$ *et* $P_n(2) > 0$ *(On peut aussi remarquer que* $\lim\limits_{x\to\infty} P_n(x) = +\infty$ *), d'autre part* $P_n(x)$ *est une fonction continue sur* $\mathbb{R}_+^*$ *car c'est une fonction polynômiale. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe* $u_n \in \mathbb{R}_+^*$*, tel que* $P_n(u_n) = 0$*.*

Il est aussi facile de voir que P_n *est une fonction strictement croissante. En effet, soient* $0 < x < y$*, on a*

$$\begin{array}{rcl} P_n(y) - P_n(x) & = & (y^n - x^n) + (y^{n-1} - x^{n-1}) + ... + (y - x) \\ & > & 0. \end{array}$$

Cela entraine du fait de la continuité que P_n *est une bijection de* $[0, +\infty[$ *dans* $[-1, +\infty[$ *ce qui entraine l'unicité de* u_n*.*

2) Nous avons d'après la première question

$$\begin{array}{rcl} P_n(u_n) & = & u_n^n + u_n^{n-1} + ... + u_n^2 + u_n - 1 \\ & = & 0, \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u_n) &= u_n^{n+1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Mais comme P_{n+1} *est strictement croissante, il existe* $0 < u_{n+1} < u_n$ *tel que* $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.
3) On a

$$P_n(u_n) = 0$$

est équivaut à

$$\sum_{k=1}^{n} u_n^k = 1$$

qui est aussi équivaut à

$$u_n \sum_{k=0}^{n-1} u_n^k = 1.$$

En utilisant la formule qui donne la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, on trouve

$$u_n \frac{u_n^n - 1}{u_n - 1} = 1.$$

4) On a

$$u_1 = 1$$

ce qui implique d'après ce qui précède que pour tout $n \geq 1$

$$0 < u_n < 1.$$

On en conclut que

$$\lim_{n \to \infty} u_n^n = 0.$$

Question 1
Il est maintenant clair que la limite l (qui existe) de la suite $(u_n)_n$ *est solution de l'équation*

$$\frac{-l}{l-1} = 1$$

autrement dit

$$l = \frac{1}{2}.$$

Question 2

g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = \frac{x^2 M_2 - 2M_0}{2x^2}.$$

On en déduit que

$$g'(x) = 0$$

ce qui donne

$$x^2 = \frac{2M_0}{M_2}.$$

Donc obligatoirement

$$x = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}.$$

Dans ce qui suit, on va dresser les variations de la fonction g

x	0		$\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2M_0M_2}$	$\nearrow$	$+\infty$

le minimum de g est la valeur $\sqrt{2M_0M_2}$ et il est atteint en $x = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$.

Question 3

1) Il existe c_1 appartenant à $]x, x+h[$ et il existe c_2 appartenant à $]x-h, x[$ telles que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f"(c_1)$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f"(c_2).$$

Après un simple calcul, on trouve

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h}{4}(f"(c_1) - f"(c_2))$$

ce qui implique que

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{2h} + \frac{h}{4}(|f"(c_1)| + |f"(c_2)|)$$

d'où

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

2) La déduction est que pour tout x

$$|f'(x)| \leq g(h).$$

Mais comme $g(h)$ *est minorée par* $\sqrt{2M_0M_2}$*, alors*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

B) 1) Comme $f' > 0$ *sur* $]a,b[$ *cela entraine que* f *est continue strictementcroissante sur* $[a,b]$*, donc* f *est une bijection de* $[a,b]$ *dans* $[f(a),f(b)]$ *qui contient 0. Donc,*

$$\exists ! \omega \in]a,b[\text{ tel que } f(\omega) = 0.$$

2) Déterination de l'équation cartésienne de la tangente à la courbe Γ *de* f *au point* $(b,f(b))$*. Soit* $M(x,y)$ *un point de cette tangente. On a,* $y = f(b) + (x-b)f'(b)$*. Si* $y = 0$ *alors*

$$\begin{aligned} f(b) + (x_1 - b)f'(b) &= O \\ &\Rightarrow x_1 f'(b) = bf'(b) - f(b) \\ &\Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ *où* $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
3) Il faut rappeler que f *est convexe car,* $f'' > 0$ *sur l'intervalle* $]a,b[$*. De plus,* $\forall x \in]a,b[$ *on a,*

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

D'autre part on a, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n$ *car* $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$*. En fin,* $\varphi(b) = x_1 > \omega$ *ce qui implique,* $\varphi(x_n) > \varphi(\omega) = \omega$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *donc,* $\omega < x_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On en déduit alors que* $(x_n)_n$ *est une suite décéroissante minorée donc convergente. Soit* α *sa limite. On a,*

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}) \\ &= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\end{aligned}$$

car, f *et*f' *sont continues sur* $]a,b[$. *Donc* $f(\alpha] = 0$ *implique,* $\alpha = \omega$.
4) Il est clair que $\varphi' = \frac{ff''}{(f')^2}$, *ce qui implique que* $\varphi'(\omega) = 0$. *De plus on a,*

$$\varphi'' = \frac{(f'f'' + ff^{(3)})(f')^2 - 2ff'(f''^{(2)})}{(f')^4}.$$

Ceci montre que φ *est de classe* C^2 *sur* $]a,b[$ *car* f *est de classe* C^3 *sur* $]a,b[$ *et* $f' > 0$ *sur* $[a,b]$.
Utilisation de la formule de Taylor-Young.

$$\varphi(x_n) = \varphi(\omega) + (x_n - \omega)\varphi'(\omega) + \frac{(x_n - \omega)^2}{2!}\varphi''(\omega) + \frac{(x_n - \omega)^2}{2}\epsilon(x_n - \omega)$$

avec $\lim_{n\to\infty} \epsilon(x_n - \omega) = 0$. *Ce qui entraine que,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \omega}{(x_n - \omega)^2} = \frac{\varphi''(\omega)}{2}.$$

On a utilisé le faite que,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad et\, \varphi(\omega) = \omega.$$

De ce qui précède on déduit l'implication suivante

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} :\ n \geq N_\epsilon \Rightarrow |\frac{x_{n+1} - \omega}{(x_n - \omega)^2} - \frac{1}{2}\varphi''(\omega)| < \epsilon.$$

Pour $\epsilon = 1,\ \exists N_1 \in \mathbb{N} :\ 0 < \frac{x_{n+1} - \omega}{(x_n - \omega)^2} < 1 + \frac{1}{2}\varphi''(\omega)$. *Notons*

$$M_1 = max_{0 \leq i \leq N_1}(\frac{x_{n+1} - \omega}{(x_n - \omega)^2})$$

alors on a :

$$0 < \frac{x_{n+1} - \omega}{(x_n - \omega)^2} \leq M \ \text{où}\ M = max(M_1, 1 + \frac{1}{2}\varphi''(\omega)).$$

5) On sait que $\lim_{n\to\infty}(x_n-\omega)=0$ *ce qui est équivalent à :*

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N_\epsilon\in\mathbb{N}:\ n\geq N_\epsilon\Rightarrow 0<M(x_n-\omega)<\epsilon.$$

car M *est une constante. Pour* $\epsilon=1$, $\exists N_1\in\mathbb{N}:\ n\geq N_1\Rightarrow 0<M(x_n-\omega)<1$. *On en déduit alors que* $\lim_{n\to\infty}x_n=\omega$. *D'après 4) on a*

$$x_{N+1}-\omega\leq M(x_N-\omega)^2<\frac{k^2}{M},$$

$$x_{N+2}-\omega\leq M(x_{N+1}-\omega)^2<\frac{k^4}{M}.$$

Ainsi de suite, on obtient pour tout $n>N$

$$x_n-\omega=x_{N+(n-N)}-\omega<\frac{k^{2^{n-N+1}}}{M},$$

on prend alors $c=\frac{k^{2^{-N+1}}}{M}>0$.

Solution de l'exercice 1.1.42. *1) En effet, on a*

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=(e^t)'(0)=1.$$

La fonction et trivialement impaire.
2) Un calcul simple donne

$$f'(x)=\frac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2}\ \textit{si } x\neq0.$$

3) Le signe de f'(x) est le même que celui de la fonction

$$h(x)=(2x^2-1)e^{x^2}+1.$$

Cette dernière est dérivable et

$$h'(x)=2x(2x^2+1)e^{x^2}.$$

Donc $h'(x)$ *est de même signe que* x. *Ainssi,* h *est stictement décroissante sur* $]-\infty,0[$ *et stictement croissante sur* $]0,+\infty[$. *Puisque* $h(0)=0$, *on en déduit que* h *est strictement positive sur* $\mathbb{R}^*$ *et que* f' *est aussi strictement positive sur* $\mathbb{R}^*$. *Or,* $f'(0)=1>0$, *par suite* $f'(x)>0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$. *On en conclut que* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *De plus on a*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x}=+\infty.$$

Donc $f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[$ par parité. D'après le théorème de la fonction réciproque, f est une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f^{-1} est aussi continue.
4) Comme f est de classe C^∞ au voisinage de 0 et que $f'(0) = 1 \neq 0$, alors, f^{-1} est de classe C^∞ au voisinage de $f(0) = 0$, donc admet des déveleppement limités de tout ordre. Par ailleurs la fonctio f est impaire, donc f^{-1} est également impaire. La fonction f^{-1} admet donc un déveleppement lmité au voisinage de 0 de la forme :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + x^5\epsilon(x).$$

On détermine $a,\ b,\ c$, car :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

on a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + x^6\epsilon_1(x)$$

par suite

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + x^5\epsilon_1(x)$$

et

$$(f^{-1} \circ f)(x) = af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + x^5\epsilon_2(x)$$

or

$$(f(x))^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2} + x^5\epsilon_3(x)$$

et

$$(f(x))^5 = x^5 + x^5\epsilon_4(x).$$

D'où

$$(f^{-1} \circ f)(x) = ax + (\frac{a}{2} + b)x^3 + (\frac{a}{6} + \frac{3b}{2} + c)x^5 + x^5\epsilon_5(x)$$

D'autre par $f^{-1} \circ f(x) = x$. Ainsi, par unicité du développement limitéé, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1, \\ \frac{a}{2} + b, \\ \frac{a}{6} + \frac{3b}{2} = c. \end{cases}$$

d'où l'on tire $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{7}{12}$. On a finalement

$$f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{7x^5}{12} + x^5\epsilon(x)$$

Solution de l'exercice 1.1.43. *Montrer par récurrence sur n :*

$$\forall x \neq 0 : \ f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})exp(-\frac{1}{x^2})$$

où P_n est un polynôme. En déduire é que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = exp(-\frac{1}{x^2})sin(exp(\frac{1}{x^2})) \ si \ x \neq 0 \ et \ g(0) \neq 0.$$

1) Montrer que g admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.
2) La fonction g est-elle indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$?
Si $x \neq 0 : f'(x) = \frac{1}{x^3}exp(-\frac{1}{x^2})$ et donc $P_1(t) = t^3$. Supposons que

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})exp(-\frac{1}{x^2}).$$

Alors

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (P_n'(x) + \frac{1}{x^3}P_n(x))exp(-\frac{1}{x^2}) = P_{n+1}(x)exp(-\frac{1}{x^2})$$

où $P_{n+1}(x) = P_n'(t) + t^3P_n(t)$. Par suite

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} P_n(x)exp(-\frac{1}{x^2}) = \lim_{|t|\to +\infty} P_n(t)exp(-t^2) = 0$$

Donc toutes les dérivées au point 0 existent et sont nulles. Par suite f se polonge de manière $\mathcal{C}^\infty$ en 0 ce qui implique que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus au voisinage de 0 f admet des développement limités de tout ordre :

$$f(x) = x^n\epsilon(x) \ où \ \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$$

donc au voisinage de 0 :

$$g(x) = x^n\epsilon_1(x) \ où \ \epsilon_1(x) = \epsilon(x)sin(exp(\frac{-1}{x^2})) \to 0 \ si \ si \ x \to 0.$$

Donc g admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. De plus g est indéfinement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}sin(e^{\frac{1}{x^2}})$$

car si $x \neq 0$: $|sin(e^{\frac{1}{x^2}})| \leq 1$ *et* $\lim_{|t|\to+\infty} te^{-t^2} = 0$. *Mais la dérivée* g' *de* g *n'est pas continue en* 0 *car*

$$g'(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}sin(e^{\frac{1}{x^2}}) - \frac{1}{x^3}cos(e^{\frac{1}{x^2}})$$

qui n'a pas de limite finie en 0. *Ainsi* g *admet un développement limité à tout ordre et* g' *n'admet de développement limimité à aucun ordre i.e.* g *ne peut être de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

1.2 Exercices sans solution

1.2.1 Étude de $\mathbb{R}$.

Construction de $\mathbb{R}$.

Exercise 1.2.1. *Soit* $\mathcal{E}$ *l'ensemble de toutes les suites de cauchy à valeurs dans* $\mathbb{Q}$. *On définit sur* $\mathcal{E}$ *la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \mathcal{R}\ (y_n)_{nn\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ (\varepsilon \in \mathbb{Q}),\ \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow$$

$|x_n - y_n| < \varepsilon)$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ *définie une relation d'équivalence sur* $\mathcal{E}$.

b) On note

$$\mathbb{R} = \mathcal{E}/\mathcal{R},$$

vérifier alors que $\mathbb{Q}$ *est contenu dans* $\mathbb{R}$.

c) Si $x = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ *et* $y = \overline{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ *sont deux nombres réels (i.e.* $x, y \in \mathbb{R}$ *) représentant les classes d'équivalence respectives de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et de* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$*), on dit que* $x \geq y$ *(i.e ;* x *est supérieur ou égale à* y*) si*

$$\exists N \in \mathbb{N} : n > N \Longrightarrow x_n - y_n \geq 0.$$

Montrer que $\mathbb{R}$ *muni de cette relation est totalement ordonné.*

Exercise 1.2.2. *Soient* $(\mathcal{E},\ \mathcal{R})$ *et* $(\mathcal{F},\ \mathcal{S})$ *deux ensembles totalement ordonnés. On définit sur* $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ *(le produit cartésien des deux ensembles) la relation* $\mathcal{T}$ *comme suit*

$$(a, x)\mathcal{T}(b, y) \Longleftrightarrow (a\mathcal{R}b) \quad et \quad (x\mathcal{S}y)$$

Est ce que $\mathcal{T}$ *est une relation d'ordre sur* $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ *?*

Propriétés de $\mathbb{R}$.

Exercise 1.2.3. *Montrer,*

a) ***L'inégalité de Tchebychev :***

Si $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ *et* $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$*, alors*

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i) \leq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i).$$

b) ***L'inégalité de Bernouli***

$$\forall x > -1,\ \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercise 1.2.4. *On note,* $\max(x,y)$ *(resp.* $\min(x,y)$*) le plus grand (resp. le plus petit) des deux nombres* x *et* y*. Montrer que :*

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

et que

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercise 1.2.5. *Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles suivants :*
$[0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\left\{\frac{1}{n+1} / \quad n \in \mathbb{N}\right\}$, $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} / \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$
et $\{x \in \mathbb{Q} \ / \ x^2 < 5\} \cap \mathbb{Z}$.

Exercise 1.2.6. *Montrer que si* a *et* b *sont reux réels positifs ou nuls alors*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b}.$$

Topologie de $\mathbb{R}$.

Exercise 1.2.7. *Soit* f *une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Montrer que*

$$E = \{x \in \mathbb{R} / \quad f(x) = 1\}$$

est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$*, et que*

$$F = \{x \in \mathbb{R} / \quad f(x) < 0\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercise 1.2.8.

a) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x + r \notin \mathbb{Q}$ et que si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
b) Montrer que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
c) En déduire qu'entre deux rationnels, il ya toujours un irrationnel.

Exercise 1.2.9. *Soit A une partie, non vide, de $\mathbb{R}$. Pour tout entier non nul n, on considère :*

$$A_n = \cup_{x \in A} \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[.$$

a) Montrer que A_n est un ouvert qui contient A.
b) En déduire que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts.

Exercise 1.2.10. *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) B est le plus petit fermé contenant A.
ii) B est l'intersection de tous les fermés contenant A.
iii) B=$\{x \in \mathbb{R} / \ \forall \varepsilon > 0, \ \ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \varnothing\}$.

Exercise 1.2.11. *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) C est le plus drand ouvert contenu dans A.
ii) C est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.
iii) C=$\{x \in \mathbb{R} / \ \exists \varepsilon > 0, \ \ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A\}$.

Exercise 1.2.12. *On dit qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{X} = \mathbb{R}$. Soient A et B deux parties denses dans $\mathbb{R}$, montrer que :*
1) Si $A \cap B = \varnothing$ alors $\overset{o}{A} = \varnothing$ et $\overset{o}{B} = \varnothing$.
2) Si A est ouverte alors $A \cap B$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercise 1.2.13. *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Etablir les inclusions suivantes :*

$$\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \ \subset (A \cup B)^O$$

$$\overline{A \cap B} \ \subset \ \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Donner des exemples où ces deux inclusions sont strictes.

Exercise 1.2.14. *Soit A' l'ensemble des points d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}$.*

1) *Montrer que si $x \in A'$ alors x est limite d'une suite strictement monotone d'éléments de A.*
2) *En déduire que A' est fermé.*
3) *Déterminer les points d'accumulation des ensembles suivants :* $]0,1[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\left\{\cos(\frac{2n\pi}{5}) \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *et* $\left\{\frac{1}{n} + \cos(\frac{2n\pi}{3}) \ / \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercise 1.2.15. *Soient* $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} / \ (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$ *fixé,*

a) *Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, tels que*

$$p \geq m+2, \ \ q \geq m+2 \ \ \text{et} \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{m+1}.$$

b) *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, tel que $\frac{1}{m+1} + \varepsilon < \frac{1}{m}$, l'intervalle $\left]\frac{1}{m+1} + \varepsilon, \frac{1}{m}\right[$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de A.*

c) *En déduire l'ensemble des points d'accumulation de A.*

*Exercise**** **1.2.1.** *Montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.*

*Exercise**** **1.2.2.** *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On se donne les propositions suivantes :*

$(\mathcal{P}_1)$ *De toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un éléments de E.*

$(\mathcal{P}_2)$ *Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts vérifiant : $E \subset \cup_{i\in I} O_i$, alors il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $E \subset \cup_{j\in J} O_j$.*

$(\mathcal{P}_3)$ *E est à la fois fermé et borné.*

1) *Montrer que $(\mathcal{P}_1)$ implique $(\mathcal{P}_2)$.*
2) *On suppose que E vérifie $(\mathcal{P}_1)$. Et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts dont la réunion contient E.*
   a) *Montrer que pour tout $r > 0$, il existe $x_1, x_2, , x_m$ des éléments de E tels que*

   $$E \subset \bigcup_{i=1}^{m}]x_i - r, x_i + r[\,.$$

   b) *Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que*

   $$\forall x \in E, \exists j \in I : \qquad]x - r, x + r[\subset O_j.$$

   c) *En déduire que E vérifie $(\mathcal{P}_2)$.*

3) On suppose que E vérifie $(\mathcal{P}_3)$.

a) Montrer que E est borné.

b) Soit $x \in \overline{E}$, on suppose que $x \notin E$.

i) Montrer que pour tout $t \in E$, il existe $\alpha_t > 0$ et $\beta_t > 0$ tels que

$$]t-\alpha_t, t+\alpha_t[\, \cap \,]t-\beta_t, t+\beta_t[\, = \emptyset$$

ii) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, tel que $E \cap \,]x-\lambda, x+\lambda[\, = \emptyset$.

c) Conclure.

1.2.2 Suites numériques.

Exercise 1.2.16. *Etudier la nature des suites de termes généraux suivants*

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+1},\ v_n = \frac{1-n^2}{n+2},\ w_n = u_n + v_n.$$

Exercise 1.2.17.

A) Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l. Montrer que $(u_n)_n$ converge aussi vers l.

B) Soit la suite récurrente définie par : $u_0 = \frac{7}{2}$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2+u_n}$ Montrer que

i) la suite $(u_n)_n$ est bien définie.

ii) est-elle monotone ?

iii) étudier les suites $v_p = u_{2p}$ et $w_p = u_{2p+1}$ et calculer leur limite commune. Quelle est la nature de $(u_n)_n$?

Exercise 1.2.18. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Est ce que les expressions suivantes sont vraies ?

$$\lim_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} (u_n)^{(v_n)} \text{existe ?}$$

Exercise 1.2.19. *Montrer la convergence des suites suivantes en utilisant le critère de Cauchy :*

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad$ *et* $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^2)}{2^k}$.

Exercise 1.2.20.

A) Soit θ un nombre réel n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$. On définit les deux suites $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.
i) Montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si $(v_n)_n$ converge.
ii) Montrer que ces deux suites n'ont pas de limite.
B^{***}) Soit $(u_n)_n$ une suite numérique telle que

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0.$$

Prouver que l'ensemble des points d'accumulation de la suite est un intervalle.

Exercise 1.2.21. *Calculer la limite des deux suites suivantes*
i) $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$
Indication : utiliser le fait que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x > 0.$$

ii) $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Exercise 1.2.22. *Etudier la nature des suites numériques suivantes*
i) a et b étant deux nombres réels positifs et

$$u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}.$$

ii)

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a^2}{u_n})\ ; \text{ a étant réel et u_0 donné.}$$

Exercise 1.2.23. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite l. Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite .*

Exercise 1.2.24. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son terme général*

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

1) *Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes.*

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Exercise 1.2.25. *En remarquant que*

$$3,2222... = 3 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + ...$$

monter que

$$3,2222... = \frac{29}{9}.$$

Exercise 1.2.26.

a) Montrer que $9,6666....666....$ *est un rationnel et donner son écriture sous forme* $\frac{p}{q}$ *où* p *er* q *sont des entiers naturels.*

b) Même question pour $0,179179179...179...$

c) Montrer que

$$\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

est un irrationnel.

1.2.3 Fonctions numériques.

Exercise 1.2.27. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction croissante telle que*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que :

1) $f(n) = nf(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) $f(n) = nf(1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

3) $f(n) = nf(1) \quad \forall n \in \mathbb{Q}$.

4) $f(x) = xf(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercise 1.2.28. *En utilisant la définition de la limite, montrer les assertions suivantes*

1) $\lim_{x\longrightarrow 0} \log(1+x) = 0$ *et* $\lim_{x\longrightarrow +\infty} x\exp(-x) = 0$.

2) $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = l$.

3) Si $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = l$, *alors* l *est unique.*

Exercise 1.2.29. *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to\pi/2} |\sin(x)|^{tg(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(ax) - \sin(ax)}{tg(bx) - \sin(bx)}$$

Exercise 1.2.30. *Etudier la continuité de la fonction* $g(x) = E(x) + E(2-x)$*, où* $E(x)$ *désigne la partie entière de* x*.*

Exercise 1.2.31. *Etudier le prolongement sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* f*, dans chacun des cas suivants*
1) $f(x) = \frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}$.
2) $f(x) = \cos(x)\cos(\frac{1}{x})$.
3) $f(x) = \sin(x+1)\log|1+x|$.

Exercise 1.2.32. *Montrer que les fonctions*
1) $f(x) = \sqrt{x}$ *est uniformement continue sur tout intervalle* $[A, +\infty[$ *avec* $A > 0$.
2) $g(x) = \frac{1}{x}$ *n'est pas uniforment continue sur* $]0,1]$.

Exercise 1.2.33. *En utilisant la notion de fonctions équivalentes. Calculer les limites suivantes*
i) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(\exp(x)-1)\tan^2(x)}{x(1-\cos(x))}$
ii) $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$
iii) $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\log(x^{-1}(\exp(x)-1))}{x}$

Exercise 1.2.34. *En utilisant la régle de l'hopital, calculer les limites suivantes*
$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$, $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$.

Exercise 1.2.35. *Déterminer les ensembles où les fonctions ci-dessous sont dérivables et exprimer leurs dérivées*
1) $f(x) = x\tan(x^2)$,
2) $f(x) = 1 - \cos(\sqrt{|x|})$,
3) $f(x) = \arctan(\frac{x-1}{x+2})$,
4) $f(x) = x\sin(x)\sin(\frac{1}{x})$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Exercise 1.2.36. *Soient* f *et* g *les fonctions définies respectivement par*
$f(x) = \frac{\exp(x)-1}{x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 1$ *et* $g(x) = x\exp(x) - \exp(x) + 1$.
1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.
2) Etudier les variations de la fonction f*. En déduire que* f *admet une fonction réciproque.*

Exercise 1.2.37. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies et continues sur un ségment* $[a,b]$ *et dérivables sur* $]a,b[$*. Démontrer qu'il existe un réel* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Exercise 1.2.38. *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$.*
1) Montrer que $f'(0) \geq 0$.
2) Montrer que $\forall x > 0,\ \exists c \in]0, x[$ tel que $f'(c) \geq 1$.

Exercise 1.2.39. *En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer qu'au voisinage de* 0*, on a*
$\sin(x) - \tan(x) \sim -\frac{x^3}{2}$, $\arcsin(x) \sim x$, $\log(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2}$, $\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{k=n} x^k \sim x^{n+1}$.

Exercise 1.2.40. *Soit* f *une fonction continue et dérivable sur* $]0,1[$ *telle que*

$$|f'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \left]0,1\right[.$$

Montrer que la limite de $f(x)$ *quand* x *tend vers zéro par valeurs positives existe.*

Exercise 1.2.41. *Soit* f *une fonction de classe* C^1 *sur* $[a,b]$ *telles que :*

$$f(a) = f(b)$$

et

$$f'_d(a) > 0 \quad et \quad f'_g(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \left]a,b\right[$ *tel que :* $f(c) = f(a)$ *et* $f'(c) \leq 0$.

Exercise 1.2.42. *Soit* f *une fonction de classe* C^1 *sur* $[0,+\infty[$. *On suppose qu' il existe au moins* n *racines distinctes de l'équation* $f(x) = 0$.

Montrer que l'équation

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0$$

admet au moins $(n-1)$ *racines distinctes quelle que soit la valeur de* α.

Exercise 1.2.43.

A) En utilisant la formule de Taylor, montrer que

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}, \quad \forall x > 0.$$

En déduire la limite de la suite numérique définie par

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{1 - \frac{k}{n^2}} - 1\right).$$

B) Montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=-\ln(2)$$

et que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=-\frac{\pi}{4}.$$

Exercise 1.2.44. *Soit la fonction définie par*

$$f(x)=\ln(\ln x).$$

i) Préciser le domaine de définition de f et son domaine de convexité.
ii) En déduire l'inégalité

$$\ln(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq(\ln x_1)^\lambda(\ln x_2)^\lambda,\ \ x_1>1,\ x_2>1 \text{ et } 0\leq\lambda\leq 1.$$

On retiendra l'inégalité obtenue pour $\lambda=1/3$.

Exercise 1.2.45. *Etudier les branches infinies de la fonction*

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[2]{x^2-x-1}.$$

Exercise 1.2.46. *Montrer que*
1) Si f admet un D. L. d'ordre n au voisinage de 0, alors $\lim_{x\longrightarrow 0}f(x)$ existe et elle est finie.
2) Si f admet un développement limité d'orde $n\geq 1$ au voisinage de 0 et si f est continue en 0, alors f est dérivable en 0.

Exercise 1.2.47. *En utilisant la formule de Taylor-Lagrange calculer* $\log(1+x)$ *au voisinage de 0 et déduire le D.L. au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+x}$.*

Exercise 1.2.48. *Sachant que la primitive de $\frac{1}{1+x^2}$ est* $\arctan(x)$. *Calculer le D.L. au voisinage de 0 de* $\arctan(x)$.

Exercise 1.2.49. *Donner le D.L au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.*

Exercise 1.2.50. *Soit*

$$f(x)=\frac{x(1+\cos(x))-2\tan(x)}{2x-\sin(x)+\tan(x)}.$$

En utilisant le D.L. au voisinage de 0 de $f(x)$, calculer $\lim_{x\longrightarrow 0}f(x)$.

1.2.4 Problèmes ou exercices de synthèses.

Exercise 1.2.51. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$$

n'est pas périodique.

Exercise 1.2.52. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est paire et dérivable alors, la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$g(x) = f(x) + xf'(x)$$

est paire.

Exercise 1.2.53. *Soit f :$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Déterminer si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :
P_1 : f est strictement croissante alors f est injective.
P_2 : f est continue alors f est surjective dans $[f(a), f(b)]$.
P_3 : f est strictement croissante et continue alors f est dérivable.

Exercise 1.2.54. *Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2)\ln(\frac{x}{2-x}) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \ x = 0 \\ -2(x-1)^{2-x} & si \ x > 1 \end{cases} .$$

a) Etudier la continuité de f.
b) Etudier la dérivabilité de f et donner l'expression de la fonction dérivée.
c) Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f'(a) = 0$.
d) Montrer que f est une bijection de $[a, 2\ ]$ sur $[-2, f(a)]$ et calculer $(f^{-1})'(0)$.

*Exercise** **1.2.1.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_{2(n+1)} &= \sqrt{1 + u_{2n}} \\ u_{2n+1} &= 3 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

i) En posant $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, étudier la convergence des deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) *Soit* $A = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. *Déterminer les points isolés de* A, *les points d'accumulation de* A *et l'adhérence de* A.

iii) *Est ce que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente ? Justifier votre réponse.*

Problème 1. *(Extrait de l'examen d'Analyse, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir, SMA/SMI* 1^{er} *semestre 2008).*

Soit f *une fonction deux fois dérivable sur* $[a, b]$ *telle que* f''' *existe sur* $]a, b[$.
1) Soit φ *la fonction définie sur* $[a, b]$ *par*

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}[f'(a) + f'(x)] + \frac{(x-a)^3}{12}M,$$

où M *est un réel à déterminer de telle manière que* $\varphi(b) = 0$. *Déduire d'près le théorème de Rolle qu'il existe* $c_0 \in]a, b[$ *telle que* $\varphi'(c_0) = 0$.
2) Calculer $\varphi'(x)$ *sur* $[a, b]$. *Par application du Théorème de Rolle, déduire qu'il existe* $c \in]a, c_0[$ *tel que* $\varphi''(c) = 0$.
3) Montrer que $\forall x \in]a, b[$, *on a* $\varphi''(x) = \frac{x-a}{2}M - \frac{(x-a)}{2}f'''(x)$ *et déduire que* $M = f'''(c)$.
4) Déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}[f'(a) + f'(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f'''(c).$$

Exercise 1.2.55. *(Extrait du contrôle continu d'Analyse, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir, SMA/SMI* 1^{er} *semestre 2007).*

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x}.$$

1) *Etudier la continuité et la dérivabilité de* f *sur son domaine de définition et drésser son tableau de variation.*
2) *Montrer que* f *admet un seul point d'inflexion.*
3) *Tracer dans un repère orthonormé la courbe de* f.
4) *Montrer que pour tout* $a \in \,]0, e^{-1}[$ *l'équation* $f(x) = a$ *admet une et une seule solution dans chacun des intervalles* $]0, e[$ *et* $]e, +\infty[$.
5) *Déduire les valeurs de* n *et* m $(n < m)$ *tous les deux dans* $\mathbb{N}$ *ensemble des entiers naturels telle que*

$$n^m = m^n.$$

*Exercise*** **1.2.1.** *(Extrait de l'examen d'Analyse, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir, SMA/SMI* 1^{er} *semestre 2007).*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

I) a) Montrer que si K *est un sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}$*, alors* $f(K)$ *est un sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}$*.*

b) En déduire que si a *et* b *sont deux réels tels que :* $a < b$*, alors*

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

existe dans $\mathbb{R}$*.*

II) On suppose maintenant que f *est de classe* C^2 *sur l'intervalle* $[a, b]$ *et que* $f(a) = f(b) = 0$*.*

a) Justifier l'existence du réel M *défini comme suit*

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)| .$$

b) Soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(x-a)(x-b)\lambda \quad (\forall x \in [a, b]\,).$$

Montrer que pour tout x *appartenant à* $]a, b[$ *il existe* λ *appartenant à* $\mathbb{R}$ *tel que :* $g(x) = 0$*.*

c) Montrer dans ce cas, qu'il existe deux nombres réels c_1 *et* c_2 *telles que*

$$a < c_1 < x < c_2 < b \quad \textit{et} \quad g'(c_1) = g'(c_2) = 0.$$

d) Montrer qu'il existe un nombre réel c_3 *tel que*

$$g''(c_3) = 0.$$

e) En déduire que

$$\forall x \in \,]a, b[\,,\ \exists c_x \in \,]a, b[\ \textit{ tel que } f(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)g''(c_x).$$

f) Montrer que

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{|b-a|^2}{8} M.$$

*Exercise** **1.2.2.** *(Extrait de l'examen d'Analyse, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir, SMA/SMI Janvier 2005).*

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et soit x un point quelconque de $\mathbb{R}$. On appelle distance de x à A et on note $d(x, A)$ le nombre réel défini par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

1) *Justifier que $d(x, A)$ existe et qu'il est positif. Indication, considérer l'ensemble*
$$E = \{|x - a| \ / a \in A\}.$$
2) *Calculer $d(x, A)$ si $x \in A$.*
3) *Donner un exemple où $x \notin A$ et $d(x, A) = 0$.*

Exercise 1.2.56. *(Extrait de l'examen de rattrapage d'Analyse, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir, SMA/SMI 1^{er} semestre Janvier 2005).*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, y dans $\mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y| \qquad \text{où } k \in]0, 1[\,.$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{array} \right. .$$

1) *Vérifier que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n\,|f(\alpha) - \alpha|$.*
2) *Vérifier que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\,|f(\alpha) - \alpha|$ $\forall m > n$.*
3) *En déduire que $(x_n)_{n\in IN}$ est convergente vers une limite unique l qui est solution de l'équation : $f(x) = x$.*

Exercise 1.2.57. *(Examen de l'Analyse SMA/SMI, Univ. Ibn Tofail, F. SC. Kenitra, F.P. Béni Mellal, F.SC. Agadir, 1^{er} semestre Janvier 2006).*

A) *Soit f la fonction définie par*

$$f : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Log(x + 1). \end{array}$$

1) *Donner le domaine de définition de f.*

2) *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x \in D_f$, *et déduire la valeur* $f'(0)$.

3) *Calculer* $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ *et* $f^{(4)}(x)$ *pour tout* $x \in D_f$, *et déduire les valeurs* $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ *et* $f^{(4)}(0)$.

4) *Donner une formule par récurrence qui permet de calculer* $f^{(n)}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $\forall x \in D_f$.

5) *Pour tout* x *positif strictement, donner la formule de Taylot à l'ordre* n *appliquée à la fonction* f *sur l'intervalle* $[0, x]$.

6) *Poser pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x)$ *la partie principale de la formule de Taylor calculée dans la question précèdente. Calculer* $p_n(1)$.

7) *En déduire que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = Log(2).$$

B) *Claculer les deux limites suivantes*

$$\lim_{x \to +\infty} (x - x^2 Log(1 + \frac{1}{x}))$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x) - x^2 \cos(x)}{x^2(1 - \cos x)}$$

Exercise 1.2.58. *Soit* f *la fonction définie comme suit*

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \begin{cases} Log\,|x| & si\ |x| < 1 \\ \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}} & si\ |x| \geqslant 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

1) *Déterminer le domaine de définition de* f.

2) *Montrer que* f *est paire.*

3) *Calculer*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad et \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

4) *Montrer que* f *est continue sur son domaine de définition.*

5) *Etudier la dérivabilité de* f *sur son domaine de définition.*

6) *Donner le développement limité généralisé de* f *au voisinage de* $+\infty$.

7) *Donner l'équation de la droite tangente à la courbe de* f *au voisinage de* $+\infty$.

8) *Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe de* f.

Examen d'Analyse. Faculté polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Filière SMP, S1, 2008-2009

Exercise 1. *Vérifier les hypothéses du Théorème de Rolle dans les cas suivants*
1) $f(x) = |x|$ *sur* $[-1, 1]$.
2)$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1[\ ; \\ 0 & si\ x = 1. \end{cases}$

Exercise 2. *Soit* $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *qui à* $x \longmapsto \log(1 + x)$.
1) Montrer que f *est indéfiniment dérivable sur* $[0, 1]$ *et calculer* $f^{(k)}(x)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
2) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n *de* f *sur l'intervalle* $[0, 1]$ *et déduire que* f *admet un développement limité sur* $[0, 1]$.
3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de treme général*

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

$(v_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. *Montrer que les suites* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent et ont même limite* l *(indication : on montre que ces deux suites sont adjacentes).*
4) Déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la limite* l.
5) Déduir de 2) la valeur de l.

Problème : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ avec $x \in]0, +\infty[$.
1) Montrer que f est prolongable par continuité sur $[0, +\infty[$. On note g ce prolongement.
2) Donner explicitement g et en déduire qu'elle est continue sur $[0, A]$ avec $A > 0$.
3) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $|g'(x)| \leq M = \frac{A+1}{A^2}$, $\forall x \in [A, +\infty[$ avec $A > 0$.
4) Par application du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, y[$. Montrer que

$$\forall x \geq A, \forall y \geq A,\ on\ a\ \ |g(x) - g(y)| \leq M|x - y|.$$

5) Déduire de 3) et 4) que g est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+ = [0, A] \bigcup [A, +\infty[$. (Rappel : Toute fonction continue sur un intervalle férme borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$).

Examen d'Analyse. Faculté polydisciplinaire, Université Sultan Moulay Slimane, Filière SMP, S1, 2009-2010

Exercice 1 : (6 points)
Soit la fonction $g(x) = \frac{3-x^2}{2}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par $x_{n+1} = g(x_n)$.
1) Soit $f = g \circ g$. Calculer $f(x)$.
1.1) Etablir que

$$f(x) - x = \frac{(x-1)^3(-x-3)}{8}, \ f(x) - 1 = -\frac{(x^2-5)(x^2-1)}{8}.$$

1.2- Soit $x \in [-1, 1]$, déduire de 1.1 que $x \leq f(x) \leq 1$.
1.3) Soit $x \in [1, \frac{3}{2}]$, déduire de 1.1 que $1 \leq f(x) \leq x$.
2) Soit $x_0 \in [-1, 1]$. Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par x_0 et

$$u_n = x_{2n}, \quad u'_n = x_{2n+1}.$$

Etablir que $u_n = f(u_{n-1})$ et $u'_n = f(u'_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
3) Déduire de 1 que
3.1) $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$.
3.2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3.3) $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4) On suppose que $x_0 \in [-1, 1]$.
Déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 : (6 points)
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et α, β deux nombres tels que $a \leq \alpha < \beta \leq b$ et soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(y) = f(y) - f(\alpha) - (y-\alpha)\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - C(y-\alpha)(\beta - y),$$

où $C \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que l'on peut choisir $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$.
2) Appliquer le théorème de Rolle à g sur les intervalles $[\alpha, x]$ et $[x, \beta]$ respectivement et déduire l'existance de c_1 et c_2 tel que $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$.
3) Appliquer à g' le théorème de Rolle sur l'intervalle $[c_1, c_2]$, puis calculer la valeur de C et déduire que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, il existe $\theta_x \in [\alpha, \beta]$ tel

que

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{1}{2}(x-\alpha)(\beta-x)f''(\theta_x).$$

Exercice 3 : (4 points)
Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue.
1) Soit $g(x) = x - f(x)$. Etablir que $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$.
2) Par application du Théorème des valeurs intermidiaires (T.V.I), déduire que f admet un point fixe x_0 (solution de l'équation $f(x) = x$) sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 4 : (4 points)
Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.
1) Calculer la dérivée de f.
2) Déduire que f est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calcule sa valeur.

Bibliographie

1] Abou Hazim, Mhamed El Mountassir, Abderrahim Abkari, *Cours élémentaire de mathématiques superieures tome 1.* Collection, Maths-Plus.

[2] Y. Bougorov, S. Nikolski, *Cours de Mathématiques supérieures tome 1* (traduit du Russe) edition de Moscou.

[3] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *Cours d'analyse I,* Armand Colin-Collection U.

[4] N. Bourbaki, Livre III, *Topologie générale (*2^{eme} *édition),* Herman Paris, 1958-61.

[5] M. Chidami et M. Rachidi, *Problèmes d'examens de mathématiques premier cycle de Fac.,* Sochepress.

[6] J. Dieudonne, Elément d'analyse Tome 1, Gauthier Villars.

[7] J. Dixmier, *Cours du* 1^{er} *cycle,* Gauthier Villars.

[8] F. Delmer, *Mathématiques, Rappel du cours et problèmes corrigés (*1^{er} *cycle),* Dunod Université.

[9] A. Doneddou, *Fonctions réelles d'une variable réelle 4,* classes préparatoires, Vuibert.

[10] G. Froty, Toplogie et analyse , Tome 1 (Classe préparatoires), Vuibert.

[11] J. Lelong-Ferrand, J. M. Arnaudiès, *Cours de mathéma-*

tiques, Tome 2, Analyse, 4*ieme* édition, Dunod Univercité.

[12] Xavin Merlin, *Méthodix analyse,* exercices corrigés, Ellipses.

[13] Jean-Marie Monier, *Analyse I, cours et exercices Corrigés* 1^{ere} année MPSI, PCSI, PTSI 2^{eme} édition, Dunod.

[14] Raymond Couty et Jaques Ezra, *Analyse MP première année et spéciales A, A',* Armand Colin.